Lezione 7

Esercizi sui circuiti dinamici del I ordine

*Lezioni di **Elettrotecnica** per studenti di **Ingegneria Gestionale***

ideate e scritte da

Lorenza Corti

con il contributo di **Vincenzo Paolo Loschiavo**

Sommario

1 I circuiti con una resistenza 4

1.1 Esercizi con circuito RC serie 4

1.1.1 *Condizioni iniziali nulle* 7

1.1.2 *Condizioni iniziali non nulle* 10

1.1.3 *La scarica di un condensatore* 12

1.1.4 *Circuito risolto con l'analisi per intervalli* 15

1.2 Esercizio con circuito RC parallelo 18

1.3 Esercizi con circuito RL parallelo 23

1.3.1 *Condizioni iniziali nulle* 25

1.3.2 *Condizioni iniziali non nulle* 29

1.3.3 *Circuito risolto con l'analisi per intervalli* 30

1.4 Esercizio con circuito RL serie 33

2 Le configurazioni critiche 38

2.1 I circuiti mal modellati 38

2.2 I circuiti mal posti 41

3 I circuiti RC e RL con più resistenze 43

3.1 Circuito RC con due resistenze 43

3.2 Circuito RL con due resistenze 48

3.3 Circuito RC con tre resistenze 54

4 I circuiti risolti con un circuito equivalente 59

4.1.1 *Circuito RC con tre resistenze* 60

5 I circuiti risolti con un'analisi per intervalli 64

5.1 Circuito RL con due resistenze 64

5.2 Circuito RL con due resistenze e un interruttore 66

5.3 I circuiti con interruttore 70

5.3.1 *Esercizio: RC* 71

5.3.2 *Esercizio: RL* 74

6 I circuiti risolti con il principio di sovrapposizione degli effetti 78

6.1 Circuito RC con due generatori 78

6.1.1 *La soluzione con la sovrapposizione degli effetti* 80

6.1.2 *La soluzione con generatore equivalente* 84

7 I circuiti dinamici alimentati da generatori sinusoidali* 88

7.1 Esempio 88

Indice delle Figure 90

Domande 93

Esercizi 93

1 I circuiti con una resistenza

In questo paragrafo risolveremo problemi con circuiti di semplice topologia e aventi generatori di tipo costante.

1.1 Esercizi con circuito RC serie

Cominciamo con il circuito ***RC serie*** di Fig. 7.1. Vogliamo calcolare le grandezze presenti nel circuito[1] e rappresentate in figura[2]. Osserviamo che abbiamo fatto la convenzione del generatore sul generatore ideale di tensione e quella dell'utilizzatore sui due bipoli passivi, resistore e condensatore.

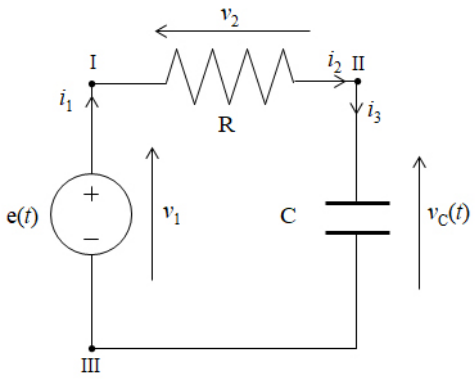


Fig. 7.1 – Circuito RC serie.

Il circuito di Fig. 7.1, come vedremo quando troveremo la soluzione, è detto ***circuito di carica*** o di ***scarica di un condensatore*** (vedi § 3.2.6 della Lezione 6), rispettivamente quando il generatore eroga una tensione in valore maggiore della condizione iniziale in cui si trova il condensatore e quando, invece, il generatore è spento oppure eroga una tensione inferiore alla tensione iniziale del condensatore.

---

[1] Sottolineiamo che in queste lezioni useremo rappresentare nelle figure le grandezze incognite di un circuito talvolta, per semplicità di notazione, senza esplicitare la dipendenza dal tempo. Ricordiamo che, in generale, quando le grandezze sono utilizzate con lettere minuscole sono sempre dipendenti dal tempo.

[2] I versi delle grandezze della Fig. 7.1 li abbiamo scelti in modo arbitrario.

Prima di fornire i valori dei parametri del circuito per poterlo risolvere cerchiamo l'equazione differenziale che lo descrive. Supponiamo di voler studiare il circuito di Fig. 7.1 dall'istante iniziale t_0. Il sistema di equazioni circuitali del circuito di Fig. 7.1, costituito da un'unica maglia e scegliendo di escludere ad esempio il nodo III nella LKC, risulta essere:

$$\begin{cases} i_1(t) - i_2(t) = 0 \\ i_2(t) - i_3(t) = 0 \\ v_1(t) - v_2(t) - v_C(t) = 0 \\ v_1(t) = e(t) \\ v_2(t) = R i_2(t) \\ i_3(t) = C \dfrac{dv_C(t)}{dt} \end{cases} \tag{7.1}$$

con $t>t_0$.

La variabile di stato del circuito di Fig. 7.1 è la tensione sul condensatore $v_C(t)$. Pertanto, dal sistema (7.1) dobbiamo eliminare tutte le incognite tranne la tensione $v_C(t)$. Cominciamo con il sostituire le relazioni caratteristiche (ultime 3 equazioni nel sistema (7.1)) nelle equazioni algebriche che derivano dalle leggi di Kirchhoff. Otteniamo:

$$\begin{cases} i_1(t) - i_2(t) = 0 \\ i_2(t) - C \dfrac{dv_C(t)}{dt} = 0 \\ e(t) - R i_2(t) - v_C(t) = 0 \end{cases} \tag{7.2}$$

con $t>t_0$.

A questo punto eliminiamo, dal sistema (7.2), le correnti $i_1(t)$ e $i_2(t)$. Questo si ottiene eliminando la prima e la seconda equazione del sistema e sostituendo la corrente $i_2(t)$, ottenuta dalla seconda equazione del sistema, nella terza equazione. Otteniamo un'unica equazione che scriviamo sotto forma di equazione di stato:

$$C \frac{dv_C(t)}{dt} = -\frac{v_C(t)}{R} + \frac{e(t)}{R} \qquad t > t_0 \tag{7.3}$$

Verifichiamo che l'equazione (7.3) deve avere tutti i termini aventi dimensione fisica equivalente ad una corrente.

L'equazione (7.3), analoga alla (6.11) della Lezione 6, è una equazione differenziale del I ordine lineare e tempo invariante nell'unica incognita, che è la variabile di stato, $v_C(t)$. La possiamo riscrivere introducendo la costante di tempo τ:

$$\tau=RC \tag{7.4}$$

e quindi avere:

$$\frac{dv_C(t)}{dt}=-\frac{v_C(t)}{\tau}+\frac{e(t)}{\tau} \qquad t>t_0 \tag{7.5}$$

analoga alla (6.12) della Lezione 6. Per determinare LA soluzione del problema abbiamo bisogno di conoscere la condizione iniziale in t_0 e quindi formulare il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{dv_C(t)}{dt}+\dfrac{1}{\tau}v_C(t)=\dfrac{e(t)}{\tau} \\ v_C(t)\big|_{t=t_0}=V_{C0} \end{cases} \qquad t>t_0 \tag{7.6}$$

dove V_{C0} è la condizione iniziale. Il sistema è analogo al (6.18) della Lezione 6.

Sempre riguardo ad un circuito RC serie, per impostare un esercizio possiamo agire sui seguenti aspetti:

- La condizione iniziale (nulla o non nulla) se il circuito ci viene consegnato nell'istante iniziale della sua evoluzione dinamica.
- La causa che ha generato l'evoluzione della dinamica, se, a differenza del caso precedente, abbiamo a disposizione il circuito prima dell'istante iniziale (il generatore che cambia valore in un istante, un interruttore che si chiude).
- Il valore del generatore costante (il valore della tensione erogata dal generatore è maggiore o minore della condizione iniziali).

Nel seguito risolveremo alcuni esercizi nei quali abbiamo considerato i vari casi appena evidenziati.

1.1.1 Condizioni iniziali nulle

Consideriamo i seguenti dati:

DATI: t_0=0, V_{C0}=0, R= 10 Ω, C=10^{-4} F, e(t)= 10u(t)V. La funzione gradino unitario $u(t)$ l'abbiamo definita nella (6.88) della Lezione 6. Vogliamo calcolare le grandezze presenti nel circuito di Fig. 7.1 per t> t_0. In t_0 il circuito si trova in uno ***stato di riposo***.

Il problema (7.6) lo possiamo riscrivere usando i dati dell'esercizio:

$$\begin{cases} \dfrac{dv_C(t)}{dt} + \dfrac{1}{\tau} v_C(t) = \dfrac{10}{\tau} & t>0 \\ v_C(t)\big|_{t=0} = 0 \end{cases} \qquad (7.7)$$

dove abbiamo la costante di tempo:

$$\tau = RC = 10^{-3}\text{s} \qquad (7.8)$$

Osserviamo che essendo il generatore costante il circuito, per t–>∞, raggiungerà un ***regime stazionario*** che vedrà tutte le grandezze del circuito divenire costanti[3].

Coerentemente a quanto detto nella Lezione 6, in particolare nella (6.25), possiamo dire che l'integrale generale del problema (7.7) risulta essere:

$$v_C(\text{k},t) = \text{k}e^{-\frac{1}{\tau}t} + v_{Cp}(t) \qquad t>0 \qquad (7.9)$$

dove abbiamo che il primo termine al secondo membro rappresenta l'integrale generale dell'omogenea associata, mentre $v_{Cp}(t)$ rappresenta la soluzione particolare. La costante k potremo determinarla, utilizzando la condizione iniziale, solo dopo aver determinato la soluzione particolare $v_{Cp}(t)$. Essendo il generatore costante per t>0, la soluzione particolare $v_{Cp}(t)$ risulterà una funzione ad essa isomorfa, e quindi costante, che possiamo calcolare direttamente dal circuito. Ciò che faremo è studiare il circuito per t>>0 e quindi per t–>∞. Il circuito di Fig. 7.1 per t–>∞ si trova in un regime di funzionamento

[3] In questo corso studieremo unicamente circuiti dinamici alimentati da generatori costanti e quindi circuiti dinamici che raggiungono un regime stazionario. Il passo successivo sarebbe quello di studiare i circuiti dinamici alimentati da generatori sinusoidali che quindi raggiungono un regime sinusoidale. Ma questo caso si rimanda a studi più approfonditi.

stazionario e pertanto il condensatore si comporta come un circuito aperto e possiamo ottenere il circuito di Fig. 7.2.

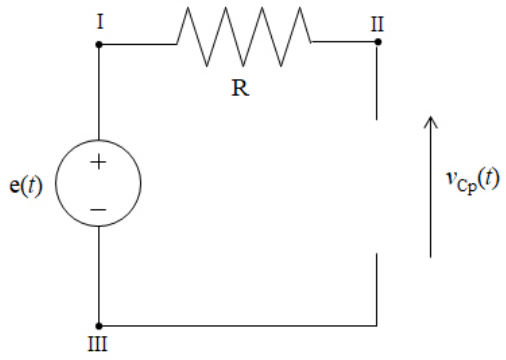


Fig. 7.2 – Circuito di Fig. 7.1 in regime stazionario.

Osserviamo che, poiché il condensatore si comporta come un circuito aperto, impone alla corrente della maglia di annullarsi. Pertanto, non c'è caduta di tensione sulla resistenza interessata da una corrente nulla. Questo comporta che ai capi del condensatore sussiste una tensione pari a quella del generatore di tensione. Possiamo scrivere allora:

$$v_{Cp}(t) = e(t) = 10\text{V} \qquad t->\infty \tag{7.10}$$

Attenzione: nella (7.10) abbiamo scritto $t->\infty$ perché l'uguaglianza tra $v_{Cp}(t)$ ed $e(t)$ la possiamo scrivere SOLO per $t->\infty$. Ma poiché $v_{Cp}(t)$ è una funzione costante, allora possiamo scrivere:

$$v_{Cp}(t) = 10\text{V} \qquad t>0 \tag{7.11}$$

In altre parole, per trovare la soluzione particolare, facciamo lavorare il circuito a regime e in quel caso, semplice, calcoliamo la soluzione particolare che sappiamo però essere la stessa per tutta l'evoluzione della dinamica[4].

L'integrale generale del problema (7.7) sarà quindi:

[4] Questo modo di procedere si estende al caso più generale di circuiti alimentati da generatori periodici (ad esempio, sinusoidali). Anche nel caso generale, infatti, la forma della soluzione, calcolata a regime, è la stessa per tutta l'evoluzione della dinamica.

$$v_C(k,t) = k e^{-1000t} + 10 \qquad t>0 \tag{7.12}$$

Infine, per calcolare la costante k, dobbiamo imporre le condizioni iniziali:

$$v_C(0) = k+10 = V_{C0} = 0 \;\Rightarrow\; k = -10 \tag{7.13}$$

In conclusione, la soluzione cercata sarà:

$$v_C(t) = \left(-10 \times e^{-1000t} + 10\right) V \qquad t>0 \tag{7.14}$$

In Fig. 7.3 abbiamo rappresentato graficamente la soluzione (7.14) con la linea blu. La tensione $v_C(t)$ passa da un valore nullo in t=0 ad un valore di regime per t–>∞ pari a 10V uguale a quello del generatore di tensione. Il condensatore viene quindi caricato dal generatore costante ed il circuito di Fig. 7.1 è, in questo caso, un ***circuito di carica*** (vedi § 3.2.6 della Lezione 6).

Una volta determinata la variabile di stato nell'intervallo temporale che ci interessa, possiamo passare a calcolare in ogni istante di quell'intervallo tutte le altre grandezze del circuito. Cominciamo con la corrente del condensatore $i_3(t)$. Dalla relazione caratteristica del condensatore e dalla (7.14) abbiamo:

$$i_3(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt} = e^{-1000t} A \qquad t>0 \tag{7.15}$$

Abbiamo rappresentato il grafico della (7.15) con la linea rossa di Fig. 7.3.

Infine, essendo $i_2(t)$= $i_3(t)$, in quanto corrente dell'unica maglia presente nel circuito, si ha:

$$v_2(t) = R i_2(t) = R i_3(t) = 10 \times e^{-1000t} V \qquad t>0 \tag{7.16}$$

Si osservi come il grafico rosso della Fig. 7.3 mostra una funzione discontinua ($i_3(0^-)$=0, $i_3(0^+)$=1), a differenza del grafico blu, che, essendo di una variabile di stato, è continuo in t=0.

☺

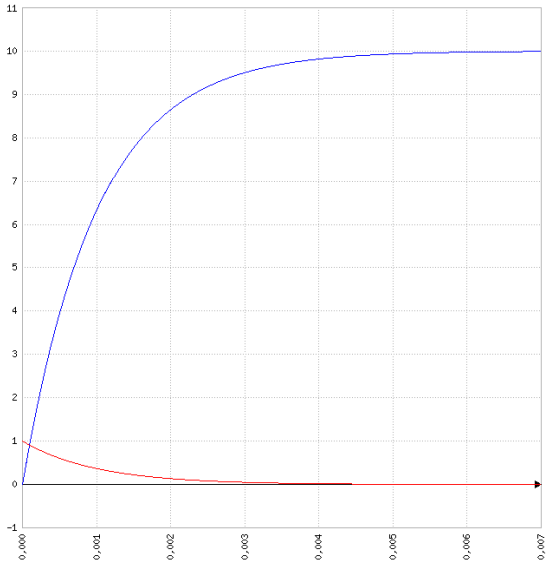


Fig. 7.3 – Grafico della funzione (7.14) in blu e (7.15) in rosso[5].

1.1.2 Condizioni iniziali non nulle

Cambiamo i dati. Determiniamo la soluzione con la condizione iniziale non nulla V_{C0}=5V.

Quindi abbiamo:

DATI: t_0=0, V_{C0}=5V, R= 10 Ω, C=10^{-4} F, e(t)= 10 u(t) V. La funzione gradino unitario $u(t)$ l'abbiamo definita nella (6.88) della Lezione 6. Vogliamo calcolare la tensione e la corrente del condensatore del circuito di Fig. 7.1 per t> t_0.

Il problema (7.6) in questo caso lo possiamo così formulare:

$$\begin{cases} \dfrac{dv_C(t)}{dt} + \dfrac{1}{\tau} v_C(t) = \dfrac{10}{\tau} \\ v_C(t)\big|_{t=0} = V_{C0} = 5\text{V} \end{cases} \qquad t>0 \qquad (7.17)$$

Con τ=10^{-3}s.

[5] Il grafico, come tutti quelli riportati in questa lezione, è stato ottenuto con la piattaforma web https://www.mathe-fa.de/it.

Possiamo agire direttamente sulla (7.12) determinando un diverso valore di k avendo una diversa condizione iniziale da soddisfare. Abbiamo:

$$v_C(0) = k + 10 = V_{C0} = 5 \Rightarrow k = -5 \tag{7.18}$$

e quindi la soluzione:

$$v_C(t) = \left(-5 \times e^{-1000t} + 10\right) V \qquad t>0 \tag{7.19}$$

Il grafico della (7.19) è mostrato in Fig. 7.4, con la linea blu.

Dalla relazione caratteristica del condensatore e dalla (7.14) abbiamo:

$$i_3(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt} = 0.5 \times e^{-1000t} A \qquad t>0 \tag{7.20}$$

Abbiamo rappresentato il grafico della (7.20) con la linea rossa di Fig. 7.4.

Infine, essendo $i_2(t)= i_3(t)$, in quanto corrente dell'unica maglia presente nel circuito, si ha:

$$v_2(t) = Ri_2(t) = Ri_3(t) = 5 \times e^{-1000t} V \qquad t>0 \tag{7.21}$$

Si osservi come il grafico rosso della Fig. 7.4 mostra una funzione discontinua ($i_3(0^-)=0$, $i_3(0^+)=0{,}5$), a differenza del grafico blu che, essendo di una variabile di stato è continuo in $t=0$.

☺

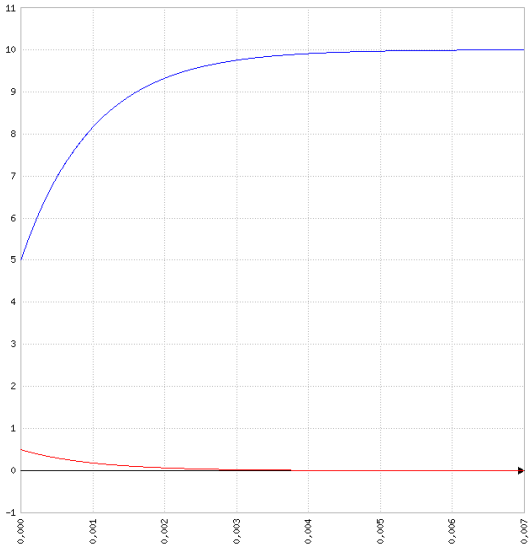


Fig. 7.4 – Grafico della funzione (7.19) in blu e (7.20) in rosso.

Il circuito che abbiamo appena studiato è ancora un ***circuito di carica di un condensatore*** in quanto, anche se inizialmente il condensatore è carico, il generatore lo porta alla fine del transitorio ad essere caricato ad un valore maggiore di quello iniziale[6].

1.1.3 La scarica di un condensatore

Vogliamo calcolare la tensione del condensatore del circuito di Fig. 7.1 per t> t_0.

Per osservare un fenomeno di scarica abbiamo due casi possibili:

- Nel circuito il generatore si spegne;
- Nel circuito il valore della tensione del generatore è minore del valore della tensione del condensatore nell'istante iniziale.

Nel primo caso proponiamo:

DATI: t_0=0, V_{C0}=3V, R= 10 Ω, C=10^{-4} F, e(t)=0.

In questo caso il problema (7.6) dobbiamo così formularlo:

[6] Facciamo un esempio pratico preso dalla vita quotidiana di tutti noi: ho il cellulare carico al 43% e lo metto a **caricare** per un po' di tempo fino al 82%.

$$\begin{cases} \dfrac{dv_C(t)}{dt} + \dfrac{1}{\tau} v_C(t) = 0 & t>0 \\ v_C(t)\big|_{t=0} = V_{C0} = 3V \end{cases} \qquad (7.22)$$

con $\tau=10^{-3}$s.

Il problema (7.22), di fatto, rappresenta la dinamica di un'***evoluzione libera***. Pertanto, usiamo la (6.33) della Lezione 6:

$$v_C(k,t) = ke^{-\frac{t}{\tau}} = ke^{-1000t} \qquad t>0 \qquad (7.23)$$

Imponiamo la condizione iniziale V_{C0}=3V:

$$v_C(0) = k = V_{C0} = 3V \qquad (7.24)$$

e quindi la soluzione:

$$v_C(t) = 3\times e^{-1000t} V \qquad t>0 \qquad (7.25)$$

Il grafico, che rappresenta la scarica del condensatore, della (7.25) lo abbiamo mostrato in Fig. 7.5.

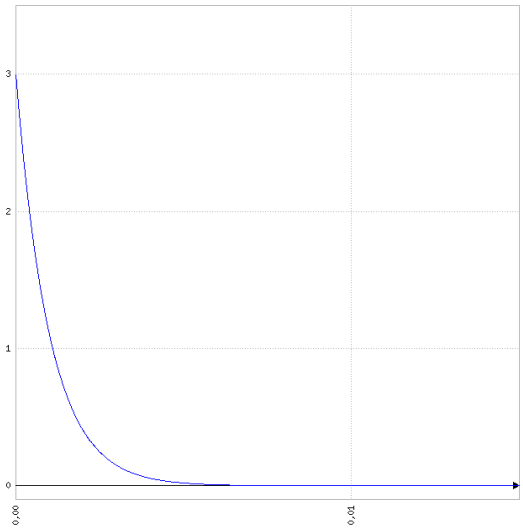


Fig. 7.5 – Grafico della funzione (7.25) – evoluzione libera di un circuito RC.

Nel secondo caso abbiamo:

DATI: t_0=0, V_{C0}=5V, R= 10 Ω, C=10^{-4} F, e(t)=2,5u(t)V. La funzione gradino unitario $u(t)$ è stata definita nella (6.88) della Lezione 6.

In questo caso il problema (7.6) dobbiamo così formularlo:

$$\begin{cases} \dfrac{dv_C(t)}{dt} + \dfrac{1}{\tau} v_C(t) = \dfrac{2.5}{\tau} & t>0 \\ v_C(t)\big|_{t=0} = V_{C0} = 5\text{V} \end{cases} \qquad (7.26)$$

con $\tau = 10^{-3}\,\text{s}$.

La soluzione particolare:

$$v_{Cp}(t) = 2.5\text{V} \qquad t>0 \qquad (7.27)$$

e quindi l'integrale generale:

$$v_C(\text{k},t) = \text{k}e^{-1000t} + 2.5 \qquad t>0 \qquad (7.28)$$

Imponendo le condizioni iniziali alla (7.28) abbiamo la soluzione dell'esercizio:

$$v_C(t) = \left(2.5 \times e^{-1000t} + 2.5\right)\text{V} \qquad t>0 \qquad (7.29)$$

Il grafico della (7.29) lo abbiamo mostrato in Fig. 7.6. Si osservi che la derivata della funzione rappresentata in figura è negativa, il condensatore si sta scaricando.

☺

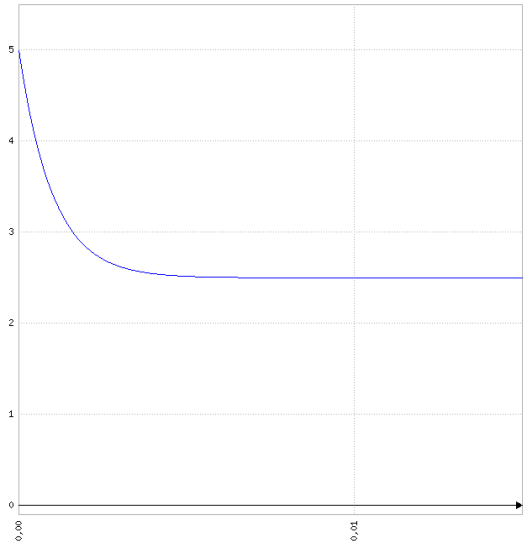


Fig. 7.6 – Grafico della funzione (7.29).

Il circuito che abbiamo appena studiato è ancora un ***circuito di scarica di un condensatore*** in quanto anche se inizialmente il condensatore è carico, il generatore lo porta ad essere caricato ad un valore minore di quello iniziale.

1.1.4 Circuito risolto con l'analisi per intervalli

I dati dell'esercizio che vogliamo risolvere in questo paragrafo sono:

DATI: t_0=0, R= 10 Ω, C=10^{-4} F, e(t)=Eu(−t)+2Eu(t), E=2V, il circuito si trova a regime per t<0. La funzione gradino unitario $u(t)$ è stata definita nella (6.88) della Lezione 6. Vogliamo calcolare la tensione del condensatore del circuito di Fig. 7.1 per t>0.

La tensione erogata dal generatore è stata rappresentata in Fig. 7.7.

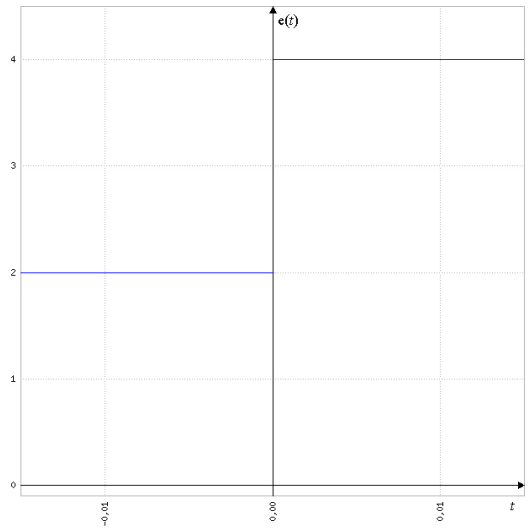


Fig. 7.7 – Grafico della tensione erogata dal generatore di tensione dell'RC serie.

Per risolvere questo circuito dobbiamo utilizzare l'***analisi per intervalli*** introdotta nel § 3.4 della Lezione 6 e ripresa nel § 5 di questa lezione. Gli intervalli si riferiscono ovviamente ad intervalli temporali. Nel nostro caso si tratta di due intervalli: $t<0$ e $t>0$. In $t=0$ abbiamo la discontinuità della tensione del generatore e quindi non è possibile scrivere in questo punto l'equazione differenziale in cui comparirebbe una grandezza discontinua in quel punto. Il raccordo tra i due intervalli temporali è assicurato dalla continuità della tensione sul condensatore, che è variabile di stato.

Intervallo $t<0$ (ossia $[-\infty,0[$)

In questo intervallo dobbiamo supporre che il circuito abbia raggiunto un regime ed in particolare, essendo il generatore costante, un regime stazionario. Il circuito si comporta in tal caso come in Fig. 7.2, con il condensatore sostituito da un circuito aperto. Il valore della tensione per $t<0$, che chiamiamo $v_{C-}(t)$, è uguale a quella del generatore di tensione, possiamo scrivere:

$$v_{C-}(t)=2\text{V} \qquad t<0 \tag{7.30}$$

Prima di passare all'intervallo $t>0$, imponiamo la condizione di continuità tra i due intervalli:

$$v_{C-}\left(0^{-}\right)=v_C\left(0^{+}\right)=v_C\left(0\right)=2\text{V} \qquad t=0 \tag{7.31}$$

Intervallo $t>0$ (ossia $[0,+\infty]$)

In questo caso, il problema (7.6) dobbiamo così formularlo:

$$\begin{cases}\dfrac{dv_C(t)}{dt}+\dfrac{1}{\tau}v_C(t)=\dfrac{4}{\tau} \\ v_C(t)\big|_{t=0^+}=v_C(0)=2\text{V}\end{cases} \qquad t>0 \tag{7.32}$$

con $\tau=10^{-3}\text{s}$.

L'integrale generale del problema (7.32) è analogo a quello della (7.17), e cioè alla (7.12). Con i dati che abbiamo scriviamo:

$$v_C(\text{k},t)=\text{k}e^{-1000t}+4 \qquad t>0 \tag{7.33}$$

Imponiamo la condizione iniziale $V_{C0}=2\text{V}$:

$$v_C(0)=\text{k}+4=V_{C0}=2\text{V}\Rightarrow\text{k}=-2\text{V} \tag{7.34}$$

e quindi la soluzione:

$$v_C(t)=\left(-2\times e^{-1000t}+4\right)\text{V} \qquad t>0 \tag{7.35}$$

Il grafico della (7.30) (in verde) e (7.35) (in blu) lo abbiamo mostrato in Fig. 7.8. Si osservi che la derivata della funzione di figura è positiva per $t>0$, il condensatore si sta caricando.

☺

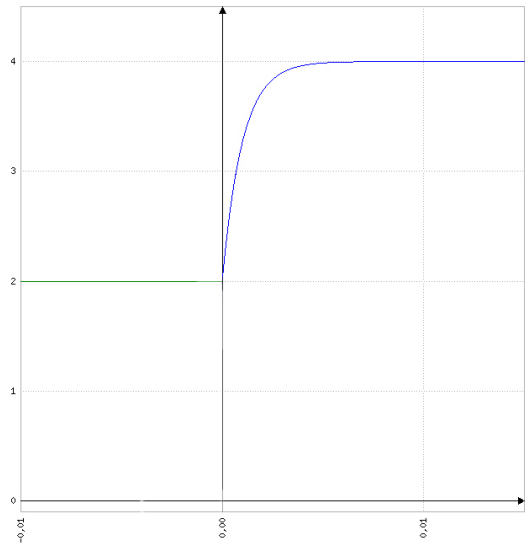


Fig. 7.8 – Grafico della funzione (7.30) in verde e (7.35) in blu.

1.2 Esercizio con circuito RC parallelo

Continuiamo la nostra disamina considerando il circuito ***RC parallelo*** mostrato in Fig. 7.9. Vogliamo calcolare la tensione e la corrente del condensatore del circuito rappresentato. Osserviamo che abbiamo fatto la convenzione del generatore sul generatore ideale di corrente e quella dell'utilizzatore sui due bipoli passivi, resistore e condensatore.

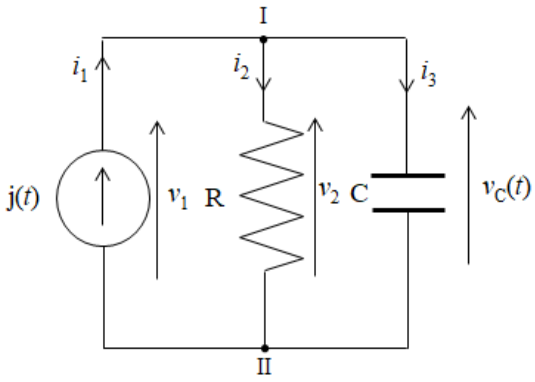


Fig. 7.9 – Circuito RC parallelo.

Anche il circuito di Fig. 7.9, come vedremo quando troveremo la soluzione, è un ***circuito di carica*** se il generatore eroga una corrente che, moltiplicata per R, sia maggiore del valore della tensione all'istante iniziale.

Per questo circuito, il sistema di equazioni circuitali risulta essere:

$$\begin{cases} i_1(t) - i_2(t) - i_3(t) = 0 \\ v_1(t) - v_2(t) = 0 \\ v_2(t) - v_C(t) = 0 \\ i_1(t) = j(t) \\ v_2(t) = R i_2(t) \\ i_3(t) = C \dfrac{dv_C(t)}{dt} \end{cases} \tag{7.36}$$

con $t>t_0$.

Ora, combinando le diverse equazioni, eliminiamo tutte le incognite tranne la tensione $v_C(t)$ e otteniamo un'unica equazione che scriviamo sotto forma di equazione di stato:

$$C\frac{dv_C(t)}{dt} = -\frac{v_C(t)}{R} + j(t) \qquad t>t_0 \tag{7.37}$$

Verifichiamo che l'equazione (7.37) deve avere tutti i termini aventi dimensione fisica equivalente ad una corrente.

Introducendo la costante di tempo (7.4) scriviamo:

$$\frac{dv_C(t)}{dt} = -\frac{v_C(t)}{\tau} + \frac{1}{\tau} R j(t) \qquad t>t_0 \tag{7.38}$$

analoga alla (6.12) della Lezione 6.

Confrontando la (7.38) e la (7.5) osserviamo che le due equazioni si equivalgono se poniamo:

$$e(t) = R j(t) \tag{7.39}$$

Questa "equivalenza", basata sempre su un principio di equivalenza, la possiamo immediatamente giustificare con il teorema del generatore equivalente studiato nella Lezione 5 ed in particolare con la formula di equivalenza (5.17) della Lezione 5. Avendo studiato la Lezione 5, sappiamo bene che i circuiti di Fig. 7.1 e Fig. 7.9 sono equivalenti sotto l'ipotesi (7.39).

Anche nel caso di circuito RC parallelo, l'integrale generale dell'equazione (7.38) risulta essere[7]:

$$v_C(k,t) = ke^{-\frac{1}{\tau}(t-t_0)} + v_{Cp}(t) \qquad t>t_0 \tag{7.40}$$

Per trovare LA soluzione del problema abbiamo bisogno di assegnare i dati e, in particolare, la condizione iniziale.

DATI: t_0=0, V_{C0}=0, R= 10 Ω, C=10^{-4} F, j(t)= 1 $u(t)$ A. La funzione gradino unitario $u(t)$ l'abbiamo definita nella (6.88) della Lezione 6.

Con questi dati la costante di tempo è ancora τ=10^{-3}, t_0=0, ed inoltre è soddisfatta la relazione (7.39). Pertanto, possiamo concludere che la soluzione del problema (7.40) con i dati assegnati sarà uguale alla (7.14) che per comodità riscriviamo:

$$v_C(t) = \left(-10 \times e^{-1000t} + 10\right) V \qquad t>0 \tag{7.41}$$

☺

Per esercitarci sul circuito di Fig. 7.9, proviamo a cambiare i dati in maniera da non verificare la condizione (7.39). Ecco i nuovi dati:

DATI: t_0=0.005s, V_{C0}=3, R= 10 Ω, C=10^{-4} F, j(t)= 2 $u(t)$ A. La funzione gradino unitario $u(t)$ l'abbiamo definita nella (6.88) della Lezione 6.

In questo caso non possiamo utilizzare i risultati ottenuti nel paragrafo precedente e quindi ripetiamo la procedura studiata nel caso di circuito RC serie per il circuito che stiamo studiando. Ci serve calcolare la soluzione particolare per dare forma alla (7.40). Ricordiamo che il regime raggiunto da questo circuito per t–>∞ è ancora un regime stazionario essendo il generatore di corrente costante.

Con i dati proposti la costante di tempo è sempre τ=10^{-3}. Questa volta, però, l'istante iniziale è diverso da 0 e non è rispettata la (7.39). La prima cosa da fare è calcolare la

[7] In realtà TUTTI i circuiti dinamici del I ordine hanno per integrale generale una funzione come la (7.40)!

soluzione particolare $v_{Cp}(t)$. Poiché per t–>∞ il circuito tende ad un regime stazionario, possiamo trovare la soluzione particolare studiando il circuito in condizioni stazionarie e quindi il circuito di Fig. 7.10.

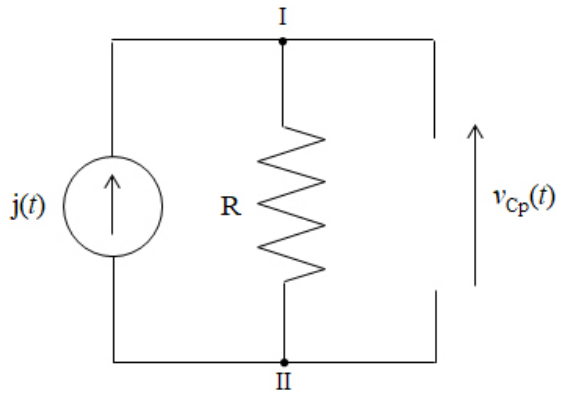


Fig. 7.10 – Circuito di Fig. 7.9 in regime stazionario.

Osserviamo che, nella Fig. 7.10, il condensatore si comporta come un circuito aperto e la tensione ai suoi terminali sarà uguale alla tensione del resistore R e quindi a $v_2(t)$. Inoltre, poiché il condensatore è un aperto, la corrente $i_3(t)$=0 e, al nodo I, $i_1(t)$= $i_2(t)$=j(t). Possiamo scrivere allora:

$$v_{Cp}(t) = v_2(t) = Ri_2(t) = Rj(t) = 20\text{V} \qquad t\text{–>}\infty \tag{7.42}$$

Al pari della (7.11), possiamo scrivere:

$$v_{Cp}(t) = 20\text{V} \qquad t\text{>}0.005\text{s} \tag{7.43}$$

L'integrale generale del problema sarà quindi:

$$v_C(k,t) = ke^{-1000(t-0.005)} + 20 \qquad t\text{>}0.005\text{s} \tag{7.44}$$

Infine, per calcolare la costante k, dobbiamo imporre le condizioni iniziali:

$$v_C(0.005) = k + 20 = V_{C0} = 3 \;\Rightarrow\; k = -17 \tag{7.45}$$

In conclusione, la soluzione cercata sarà:

$$v_C(t) = \left(-17 \times e^{-1000(t-0.005)} + 20\right) V \qquad t>0.005s \qquad (7.46)$$

In Fig. 7.11 abbiamo rappresentato graficamente la soluzione (7.46) con la linea blu. La tensione $v_C(t)$ passa da un valore V_{C0}=3V in 0.005s, ad un valore di regime per t–>∞ pari a 20V uguale a Rj(t). Il condensatore viene quindi caricato dal generatore costante ed il circuito di Fig. 7.9 è, in questo caso, un ***circuito di carica***.

Una volta determinata la variabile di stato nell'intervallo temporale che ci interessa, possiamo passare a calcolare in ogni istante di quell'intervallo tutte le altre grandezze del circuito. Facciamolo per la corrente del condensatore $i_3(t)$. Dalla relazione caratteristica del condensatore e dalla (7.46) abbiamo:

$$i_3(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt} = 1.7 \times e^{-1000(t-0.005)} A \qquad t>0.005s \qquad (7.47)$$

Abbiamo rappresentato il grafico della (7.47) con la linea rossa di Fig. 7.11.

😊

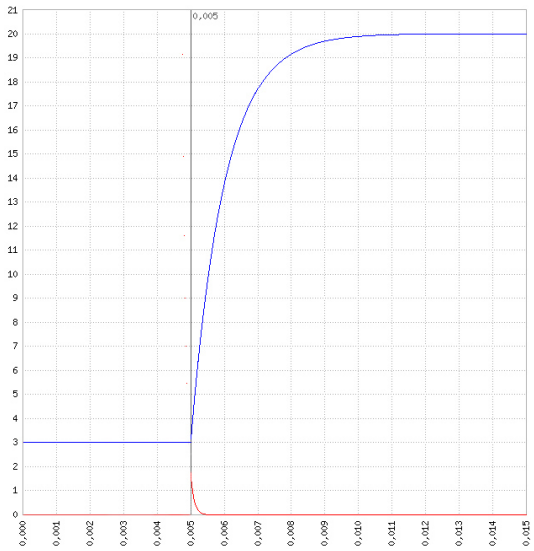


Fig. 7.11 – Grafico della funzione $v_C(t)$ in blu e $i_3(t)$ in rosso.

Nel grafico di Fig. 7.11, abbiamo rappresentato $v_C(t)$ e $i_3(t)$ anche per t<0.005s. La $i_3(t)$, per t<0.005s, è nulla in quanto derivata di una funzione costante. Possiamo osservare che essa, come c'era da aspettarsi, risulta discontinua in t=0.005s.

1.3 Esercizi con circuito RL parallelo

Sostituiamo al posto del condensatore un induttore.

Cominciamo considerando il circuito ***RL parallelo*** di Fig. 7.12. Vogliamo calcolare le grandezze presenti nel circuito e rappresentate in Fig. 7.12. Osserviamo che abbiamo fatto la convenzione del generatore sul generatore ideale di corrente e quella dell'utilizzatore sui due bipoli passivi, resistore e induttore.

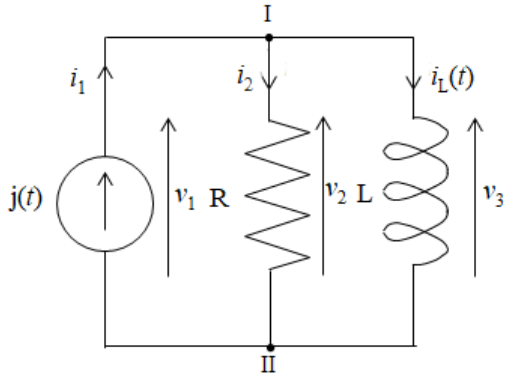


Fig. 7.12 – Circuito RL parallelo.

Il sistema di equazioni circuitali per il circuito in Fig. 7.12, essendoci due maglie ed avendo escluso il nodo II dalla LKC, risulta essere:

$$\begin{cases} i_1(t) - i_2(t) - i_L(t) = 0 \\ v_1(t) - v_2(t) = 0 \\ v_2(t) - v_3(t) = 0 \\ i_1(t) = \mathrm{j}(t) \\ v_2(t) = \mathrm{R}\, i_2(t) \\ v_3(t) = \mathrm{L}\dfrac{di_L(t)}{dt} \end{cases} \tag{7.48}$$

con $t > t_0$.

È facile verificare che, analogamente a quanto fatto nel § 1.1 con il circuito RC serie, procedendo per eliminazioni successive, combinando le diverse equazioni, troviamo l'equazione di stato per un circuito RL parallelo:

$$\mathrm{L}\frac{di_{\mathrm{L}}(t)}{dt} = -\mathrm{R}i_{\mathrm{L}}(t) + \mathrm{R}\,\mathrm{j}(t) \qquad t>t_0 \tag{7.49}$$

L'equazione (7.49) ha tutti i termini omogenei ad una tensione.

L'equazione (7.49), analoga alla (6.11) della Lezione 6, è una equazione differenziale del I ordine lineare e tempo invariante avente come unica incognita la variabile di stato $i_{\mathrm{L}}(t)$. La possiamo riscrivere introducendo la costante di tempo τ (vedi la 6.13 della Lezione 6):

$$\tau = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{R}} \tag{7.50}$$

e quindi avere:

$$\frac{di_{\mathrm{L}}(t)}{dt} = -\frac{i_{\mathrm{L}}(t)}{\tau} + \frac{\mathrm{j}(t)}{\tau} \qquad t>t_0 \tag{7.51}$$

La (7.51) è analoga alla (6.12) della Lezione 6. Per determinare LA soluzione del problema abbiamo bisogno di conoscere le condizioni iniziali in t_0 e quindi formulare il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{di_{\mathrm{L}}(t)}{dt} = -\dfrac{i_{\mathrm{L}}(t)}{\tau} + \dfrac{\mathrm{j}(t)}{\tau} \\ i_{\mathrm{L}}(t)\big|_{t=t_0} = \mathrm{I}_{\mathrm{L}0} \end{cases} \qquad t>t_0 \tag{7.52}$$

dove $\mathrm{I}_{\mathrm{L}0}$ è la condizione iniziale. Il sistema è analogo al (6.18) della Lezione 6.

Sempre riguardo ad un circuito RL parallelo, per impostare un esercizio possiamo agire sui seguenti aspetti:

- La condizione iniziale (nulla o non nulla) se il circuito ci viene consegnato nell'istante iniziale della sua evoluzione dinamica.
- La causa che ha generato l'evoluzione della dinamica, se, a differenza del caso precedente, abbiamo a disposizione il circuito prima dell'istante iniziale (il generatore che cambia valore in un istante, un interruttore che si chiude).
- Il valore del generatore costante (il valore della corrente erogata dal generatore è maggiore o minore della condizione iniziali).

Nel seguito risolveremo alcuni esercizi nei quali abbiamo considerato i vari casi appena evidenziati.

1.3.1 Condizioni iniziali nulle

Consideriamo il circuito di Fig. 7.12 con i seguenti dati:

DATI: t_0=0, I_{L0}=0, R= 10 Ω, L=10^{-3} H, j(t)= 10 u(t) A. La funzione gradino unitario $u(t)$ l'abbiamo definita nella (6.88) della Lezione 6. Vogliamo calcolare le grandezze presenti nel circuito di Fig. 7.12 per t> t_0. In t_0 il circuito si trova in uno ***stato di riposo***.

Il problema (7.52) lo possiamo riscrivere usando i dati dell'esercizio:

$$\begin{cases} \dfrac{di_L(t)}{dt} + \dfrac{1}{\tau} i_L(t) = \dfrac{10}{\tau} & t>0 \\ i_L(0) = 0 \end{cases} \qquad (7.53)$$

dove abbiamo la costante di tempo:

$$\tau = \frac{L}{R} = 10^{-4}\,\text{s} \qquad (7.54)$$

Osserviamo che essendo il generatore costante il circuito per t–>∞ raggiungerà un ***regime stazionario*** che vedrà tutte le grandezze del circuito divenire costanti[8].

Coerentemente a quanto detto nella Lezione 6, in particolare nella (6.25), possiamo dire che l'integrale generale del problema (7.53) risulta essere:

$$i_L(k,t) = k e^{-\frac{1}{\tau}(t-t_0)} + i_{Lp}(t) \qquad t>t_0 \qquad (7.55)$$

dove abbiamo che il primo termine al secondo membro rappresenta l'integrale generale dell'omogenea associata e $i_{Lp}(t)$ la soluzione particolare. La costante k potremo determinarla, utilizzando la condizione iniziale, solo dopo aver determinato la soluzione particolare $i_{Lp}(t)$. Essendo il generatore di corrente costante per t>0, la soluzione

[8] In questo corso studieremo unicamente circuiti dinamici alimentati da generatori costanti e quindi circuiti dinamici che raggiungono un regime stazionario. Il passo successivo sarebbe quello di studiare i circuiti dinamici alimentati da generatori sinusoidali che quindi raggiungono un regime sinusoidale. Ma questo caso si rimanda a studi più approfonditi.

particolare $i_{Lp}(t)$ risulterà una funzione ad essa isomorfa, e quindi costante, che possiamo calcolare direttamente dal circuito. Ciò che faremo è studiare il circuito per t>>0 e quindi per t–>∞. Il circuito di Fig. 7.12 per t–>∞ si trova in un regime di funzionamento stazionario e pertanto l'induttore si comporta come un corto circuito, ossia avremo il circuito di Fig. 7.13.

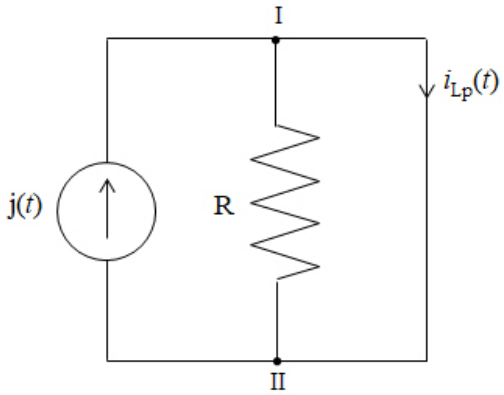


Fig. 7.13 – Circuito di Fig. 7.12 in regime stazionario.

Osserviamo che, poiché l'induttore si comporta come un corto circuito, ed essendo in parallelo alla resistenza R, esso impone alla tensione $v_2(t)$ di annullarsi per t–>∞. Pertanto, nel resistore R, non vi sarà passaggio di corrente. Questo comporta che nel corto circuito, e quindi nell'induttore a regime, ci sarà una corrente pari a quella del generatore di corrente j(t). Possiamo scrivere allora:

$$i_{Lp}(t) = j(t) = 10\text{A} \qquad t\text{–>}\infty \tag{7.56}$$

Attenzione: nella (7.56) abbiamo scritto t–>∞ perché l'uguaglianza tra $i_{Lp}(t)$ ed j(t) la possiamo scrivere SOLO per t–>∞. Ma poiché $i_{Lp}(t)$ è una funzione costante, allora possiamo scrivere:

$$i_{Lp}(t) = 10\text{A} \qquad t\text{>}0 \tag{7.57}$$

In altre parole, per trovare la soluzione particolare, facciamo lavorare il circuito a regime e in quel caso, semplice, calcoliamo la soluzione particolare che sappiamo però essere la stessa per tutta l'evoluzione della dinamica[9].

L'integrale generale del problema (7.53) sarà quindi:

$$i_L(k,t) = k e^{-10000t} + i_{Lp}(t) \qquad t>0 \tag{7.58}$$

Abbiamo già osservato che l'induttore si comporta, in regime stazionario, come un corto circuito e quindi impone una tensione nulla sulla resistenza. Questo comporta che l'induttore è attraversato da una corrente pari alla corrente del generatore. Possiamo scrivere allora:

$$i_{Lp}(t) = 10 \qquad t>0 \tag{7.59}$$

L'integrale generale del problema sarà:

$$i_L(k,t) = k e^{-10000t} + 10 \qquad t>0 \tag{7.60}$$

Infine, per calcolare la costante k, dobbiamo imporre la condizione iniziale:

$$i_L(0) = k+10 = I_{L0} = 0 \;\Rightarrow\; k = -10 \tag{7.61}$$

In conclusione, la soluzione cercata sarà:

$$i_L(t) = \left(-10 \times e^{-10000t} + 10\right) A \qquad t>0 \tag{7.62}$$

In Fig. 7.14 abbiamo rappresentato graficamente la soluzione (7.62) con la linea blu. La corrente $i_L(t)$ passa da un valore nullo in t=0 ad un valore di regime per t–>∞ pari a 10A uguale a quello del generatore di corrente. L'induttore viene quindi caricato dal generatore costante di corrente.

[9] Questo modo di procedere si estende al caso più generale di circuiti alimentati da generatori periodici (ad esempio, sinusoidali). Anche nel caso generale infatti la forma della soluzione, calcolata a regime, è la stessa per tutta l'evoluzione della dinamica.

Una volta determinata la variabile di stato nell'intervallo temporale che ci interessa, possiamo passare a calcolare in ogni istante di quell'intervallo tutte le altre grandezze del circuito. Cominciamo con la tensione dell'induttore $v_3(t)$. Dalla relazione caratteristica dell'induttore e dalla (7.62) abbiamo:

$$v_3(t) = \mathrm{L}\frac{di_\mathrm{L}(t)}{dt} = 100 \times \mathrm{e}^{-10000t}\mathrm{V} \qquad t>0 \qquad (7.63)$$

Abbiamo rappresentato il grafico della (7.63) con la linea rossa di Fig. 7.14

Infine, essendo $v_2(t)= v_3(t)$, in quanto tensione del parallelo presente nel circuito, si ha:

$$i_2(t) = \frac{v_2(t)}{\mathrm{R}} = \frac{v_3(t)}{\mathrm{R}} = 10 \times \mathrm{e}^{-10000t}\mathrm{A} \qquad t>0 \qquad (7.64)$$

Si osservi come il grafico rosso della Fig. 7.14 mostra una funzione discontinua ($v_3(0^-)=0$, $v_3(0^+)=100$), a differenza del grafico blu, che, essendo relativo ad una variabile di stato, è continuo in $t=0$.

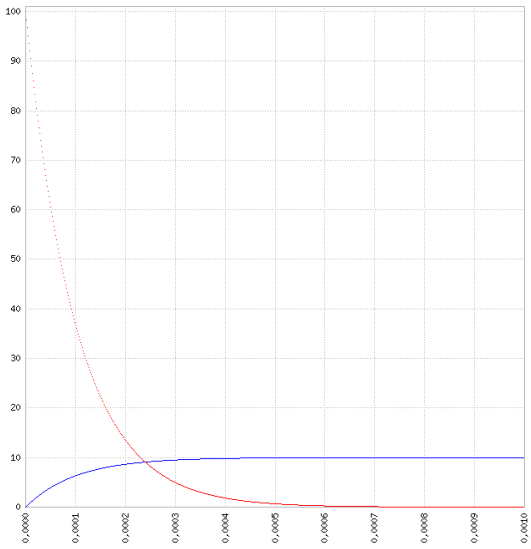


Fig. 7.14 – Grafico della funzione (7.62) in blu e (7.63) in rosso.

1.3.2 Condizioni iniziali non nulle

Cambiamo i dati. Determiniamo la soluzione con la condizione iniziale non nulla I_{L0}=4A.

Quindi abbiamo:

DATI: t_0=0, I_{L0}=4A, R= 10 Ω, L=10^{-3} H, j(t)= 10 u(t) A. La funzione gradino unitario $u(t)$ l'abbiamo definita nella (6.88) della Lezione 6. Vogliamo calcolare la corrente e la tensione dell'induttore del circuito di Fig. 7.12 per t> t_0.

Il problema (7.52) in questo caso lo possiamo così formulare:

$$\begin{cases} \dfrac{di_L(t)}{dt} + \dfrac{1}{\tau} i_L(t) = \dfrac{10}{\tau} & t>0 \\ i_L(0) = I_{L0} = 4\text{A} \end{cases} \qquad (7.65)$$

con τ=10^{-4}s.

Possiamo agire direttamente sulla (7.61) determinando un diverso valore di k avendo una diversa condizione iniziale da soddisfare. Abbiamo:

$$i_L(0) = k+10 = I_{L0} = 4 \;\Rightarrow\; k = -6 \qquad (7.66)$$

e quindi la soluzione:

$$i_L(t) = \left(-6\times e^{-10000t} + 10\right)\text{A} \qquad t>0 \qquad (7.67)$$

Il grafico della (7.67) lo abbiamo mostrato in Fig. 7.15 con la linea blu.

Dalla relazione caratteristica dell'induttore e dalla (7.67) abbiamo:

$$v_3(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} = 60\times e^{-10000t}\text{V} \qquad t>0 \qquad (7.68)$$

Abbiamo rappresentato il grafico della (7.68) con la linea rossa di Fig. 7.15.

Infine, essendo $v_2(t)$= $v_3(t)$, in quanto tensione del parallelo presente nel circuito, si ha:

$$i_2(t) = \frac{v_2(t)}{R} = \frac{v_3(t)}{R} = 6\times e^{-10000t}\text{A} \qquad t>0 \qquad (7.69)$$

Si osservi come il grafico rosso della Fig. 7.15 mostra una funzione discontinua ($v_3(0^-)=0$, $v_3(0^+)=60$V), a differenza del grafico blu che essendo relativo ad una variabile di stato è continuo in $t=0$.

☺

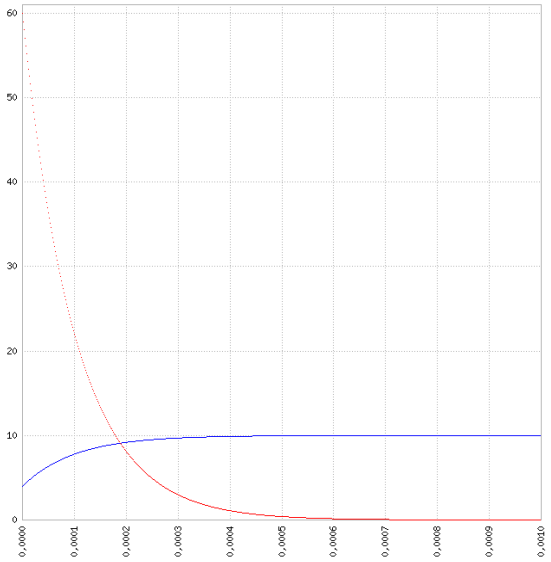


Fig. 7.15 – Grafico della funzione (7.67) in blu e (7.68) in rosso.

1.3.3 Circuito risolto con l'analisi per intervalli

I dati dell'esercizio che vogliamo risolvere in questo paragrafo sono:

DATI: $t_0=0$, R= 10 Ω, L=10^{-3} H, j(t)=Ju(–t)–3Ju(t), J=2A, il circuito si trova a regime per t<0. La funzione gradino unitario $u(t)$ l'abbiamo definita nella (6.88) della Lezione 6. Vogliamo calcolare la corrente e la tensione dell'induttore del circuito di Fig. 7.12 per $t>0$.

La corrente erogata dal generatore è rappresentata in Fig. 7.16.

Per risolvere questo circuito dobbiamo utilizzare l'***analisi per intervalli*** introdotta nel § 3.4 della Lezione 6 e ripresa nel § 5 di questa lezione. Gli intervalli si riferiscono ovviamente ad intervalli temporali. Nel nostro caso si tratta di due intervalli: $t<0$ e $t>0$. In $t=0$ abbiamo la discontinuità della corrente del generatore e quindi non è possibile scrivere in questo punto l'equazione differenziale in cui comparirebbe una grandezza

discontinua in quel punto. Il raccordo tra i due intervalli temporali è assicurato dalla continuità della corrente sull'induttore che è variabile di stato.

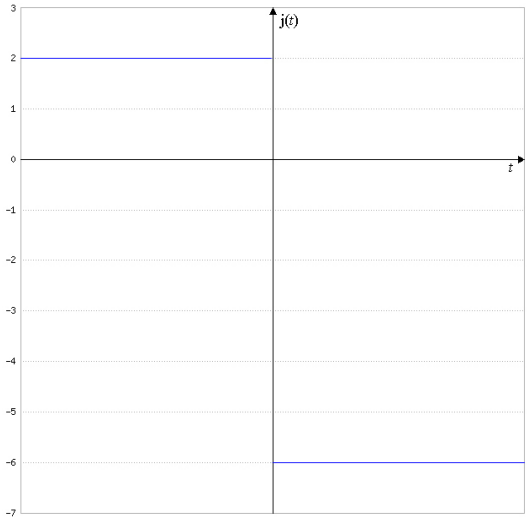


Fig. 7.16 – Grafico della corrente erogata dal generatore di corrente dell'RL parallelo.

Intervallo $t<0$

In questo intervallo dobbiamo supporre che il circuito abbia raggiunto un regime, in particolare essendo il generatore costante, un regime stazionario. Il circuito si comporta come in Fig. 7.13, con l'induttore sostituito da un corto circuito. Il valore della corrente dell'induttore per $t<0$, che chiamiamo $i_{L-}(t)$, è uguale a quella del generatore di corrente, possiamo scrivere:

$$i_{L-}(t) = 2\text{A} \qquad t<0 \tag{7.70}$$

Prima di passare all'intervallo $t>0$, imponiamo la condizione di continuità tra i due intervalli:

$$i_{L-}(0^-) = i_L(0^+) = i_L(0) = 2\text{A} \qquad t=0 \tag{7.71}$$

Intervallo $t>0$

In questo caso il problema (7.52) dobbiamo così formularlo:

$$\begin{cases} \dfrac{di_L(t)}{dt} + \dfrac{1}{\tau} i_L(t) = -\dfrac{6}{\tau} & t>0 \\ i_L(t)\big|_{t=0^+} = i_L(0) = 2\text{A} \end{cases} \qquad (7.72)$$

con $\tau = 10^{-4}\text{s}$.

L'integrale generale del problema (7.72) è analogo al problema (7.65) e quindi alla (7.58).
Con i dati che abbiamo possiamo scrivere:

$$i_L(\text{k},t) = \text{k}e^{-10000t} - 6 \qquad t>0 \qquad (7.73)$$

Imponiamo la condizione iniziale I_{L0}=2A:

$$i_L(0) = \text{k} - 6 = \text{I}_{L0} = 2\text{A} \Rightarrow \text{k} = 8\text{A} \qquad (7.74)$$

e quindi la soluzione:

$$i_L(t) = \left(8 \times e^{-10000t} - 6\right)\text{A} \qquad t>0 \qquad (7.75)$$

Il grafico delle (7.70) (in verde) e (7.75) (in blu) sono riportati in Fig. 7.17.

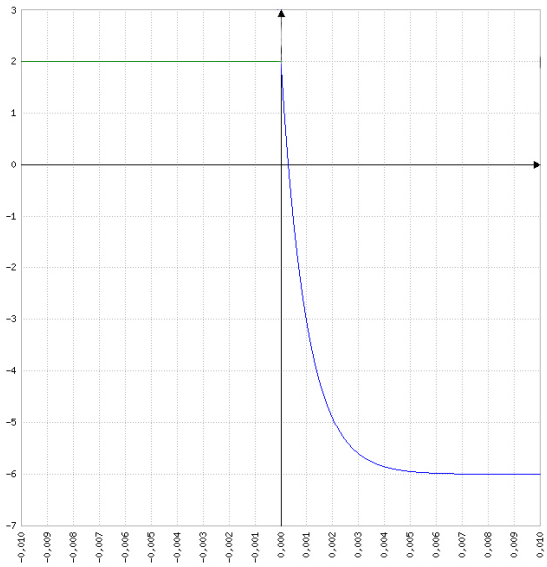


Fig. 7.17 – Grafico della funzione (7.70) in verde e (7.75) in blu.

1.4 Esercizio con circuito RL serie

In questo paragrafo consideriamo i circuiti ***RL serie*** come in Fig. 7.18. Vogliamo calcolare la corrente e la tensione dell'induttore del circuito di figura. Osserviamo che abbiamo fatto la convenzione del generatore sul generatore ideale di tensione e quella dell'utilizzatore sui due bipoli passivi, resistore e induttore.

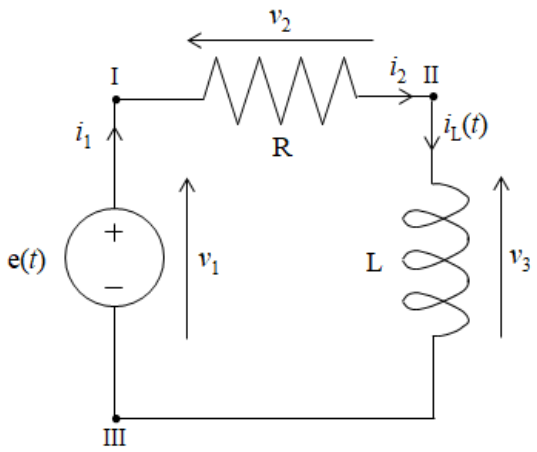


Fig. 7.18 – Circuito RL serie.

Il sistema di equazioni circuitali per il circuito in Fig. 7.18, essendoci una sola maglia ed avendo escluso il nodo III per la LKC, risulta essere:

$$\begin{cases} i_1(t) - i_2(t) = 0 \\ i_2(t) - i_L(t) = 0 \\ v_1(t) - v_2(t) - v_3(t) = 0 \\ v_1(t) = e(t) \\ v_2(t) = R i_2(t) \\ v_3(t) = L \dfrac{di_L(t)}{dt} \end{cases} \tag{7.76}$$

con $t > t_0$.

Per trovare la corrente dell'induttore, eliminiamo, combinando tra loro le diverse equazioni appena scritte, tutte le incognite tranne la corrente $i_L(t)$ e otteniamo un'unica equazione che scriviamo sotto forma di equazione di stato:

$$\mathrm{L}\frac{di_{\mathrm{L}}(t)}{dt} = -\mathrm{R}i_{\mathrm{L}}(t) + \mathrm{e}(t) \qquad t>t_0 \tag{7.77}$$

Verifichiamo che l'equazione (7.77) deve avere tutti i termini aventi dimensione fisica equivalente ad una tensione.

Introducendo la costante di tempo (7.50) scriviamo:

$$\frac{di_{\mathrm{L}}(t)}{dt} = -\frac{i_{\mathrm{L}}(t)}{\tau} + \frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{e}(t)}{\mathrm{R}} \qquad t>t_0 \tag{7.78}$$

analoga alla (6.12) della Lezione 6.

Confrontando la (7.78) e la (7.51) osserviamo che le due equazioni si equivalgono se poniamo:

$$\mathrm{e}(t)=\mathrm{R}\mathrm{j}(t) \tag{7.79}$$

Questa "equivalenza", basata su un principio di equivalenza, la possiamo immediatamente giustificare con il teorema del generatore equivalente studiato nella Lezione 5 ed in particolare con la formula di equivalenza (5.17) della Lezione 5. Avendo studiato la Lezione 5, sappiamo bene che i circuiti di Fig. 7.12 e Fig. 7.18 sono equivalenti sotto l'ipotesi (7.79).

Anche nel caso di circuito RL serie, l'integrale generale dell'equazione (7.78) risulta essere[10]:

$$i_{\mathrm{L}}(\mathrm{k},t) = \mathrm{k}e^{-\frac{1}{\tau}(t-t_0)} + i_{\mathrm{Lp}}(t) \qquad t>t_0 \tag{7.80}$$

Per trovare LA soluzione del problema abbiamo bisogno di assegnare i dati e in particolare, la condizione iniziale.

DATI: t_0=0, $i_{\mathrm{L}}(0)$=0, R= 10 Ω, L=10^{-3} H, e(t)= 100 $u(t)$V. La funzione gradino unitario $u(t)$ l'abbiamo definita nella (6.88) della Lezione 6.

[10] In realtà TUTTI i circuiti dinamici del I ordine hanno per integrale generale una funzione come la (7.80)(7.40)!

È facile verificare che, essendo e(t)=R j(t), la soluzione sarà ancora la (7.62), che per comodità riscriviamo:

$$i_L(t) = \left(-10 \times e^{-10000t} + 10\right) A \qquad t>0 \qquad (7.81)$$

☺

Per esercitarci sul circuito di Fig. 7.18, proviamo a cambiare i dati in maniera da non verificare la condizione (7.79). Ecco i nuovi dati:

DATI: t_0=0.02s, $i_L(0)$=2A, R= 10 Ω, L=10^{-3} H, e(t)= 10 $u(t)$V.

In questo caso, non possiamo utilizzare i risultati ottenuti nel paragrafo precedente e quindi ripetiamo la procedura studiata nel caso di circuito RL parallelo per il circuito che stiamo studiando. Ci serve calcolare la soluzione particolare per dare forma alla (7.80). Ricordiamo che il regime raggiunto da questo circuito per t–>∞ è ancora un regime stazionario essendo il generatore di tensione costante.

Con i dati proposti la costante di tempo è sempre τ=10^{-4}. Questa volta però l'istante iniziale è diverso da 0 e non è rispettata la (7.79). La prima cosa da fare è calcolare la soluzione particolare $i_{Lp}(t)$. Poiché per t–>∞ il circuito tende ad un regime stazionario, possiamo trovare la soluzione particolare studiando il circuito in condizioni stazionarie e quindi il circuito di Fig. 7.19.

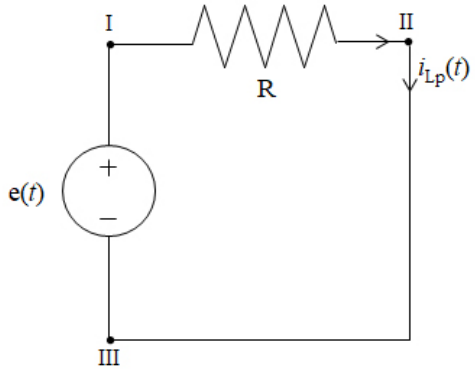


Fig. 7.19 – Circuito di Fig. 7.18 in regime stazionario.

Osserviamo che, nella Fig. 7.19, l'induttore si comporta come un corto circuito e la corrente che lo attraversa sarà uguale alla corrente del resistore R e quindi a $i_2(t)$. Inoltre,

poiché l'induttore è un corto, la tensione $v_3(t)$=0 e, all'unica maglia presente, $v_1(t)$= $v_2(t)$=e(t). Possiamo scrivere allora:

$$i_{\mathrm{Lp}}(t) = i_2(t) = \frac{v_2(t)}{\mathrm{R}} = \frac{\mathrm{e}(t)}{\mathrm{R}} = 1\mathrm{A} \qquad t\text{–>}\infty \tag{7.82}$$

Al pari della (7.82), possiamo scrivere:

$$i_{\mathrm{Lp}}(t) = 1\mathrm{A} \qquad t\text{>}0.02\mathrm{s} \tag{7.83}$$

L'integrale generale del problema sarà quindi:

$$i_{\mathrm{L}}(\mathrm{k},t) = \mathrm{k}\,\mathrm{e}^{-10000(t-0.02)} + 1 \qquad t\text{>}0.02\mathrm{s} \tag{7.84}$$

Infine, per calcolare la costante k, dobbiamo imporre le condizioni iniziali:

$$i_{\mathrm{L}}(0.02) = \mathrm{k} + 1 = \mathrm{I}_{\mathrm{L0}} = 2 \;\Rightarrow\; \mathrm{k} = 1 \tag{7.85}$$

In conclusione, la soluzione cercata sarà:

$$i_{\mathrm{L}}(t) = \left(\mathrm{e}^{-10000(t-0.02)} + 1\right)\mathrm{A} \qquad t\text{>}0.02\mathrm{s} \tag{7.86}$$

In Fig. 7.20 abbiamo rappresentato graficamente la soluzione (7.86) con la linea blu. La corrente $i_{\mathrm{L}}(t)$ passa da un valore $\mathrm{I_{L0}}$=2A in 0.02s, ad un valore di regime per t–>∞ pari a 1A uguale a e(t)/R.

Una volta determinata la variabile di stato nell'intervallo temporale che ci interessa, possiamo passare a calcolare in ogni istante di quell'intervallo tutte le altre grandezze del circuito. Facciamolo per la tensione dell'induttore $v_3(t)$. Dalla relazione caratteristica del condensatore e dalla (7.86) abbiamo:

$$v_3(t) = \mathrm{L}\frac{di_{\mathrm{L}}(t)}{dt} = -10 \times \mathrm{e}^{-10000(t-0.02)}\mathrm{V} \qquad t\text{>}0.02\mathrm{s} \tag{7.87}$$

Abbiamo rappresentato il grafico della (7.87) con la linea rossa di Fig. 7.20.

☺

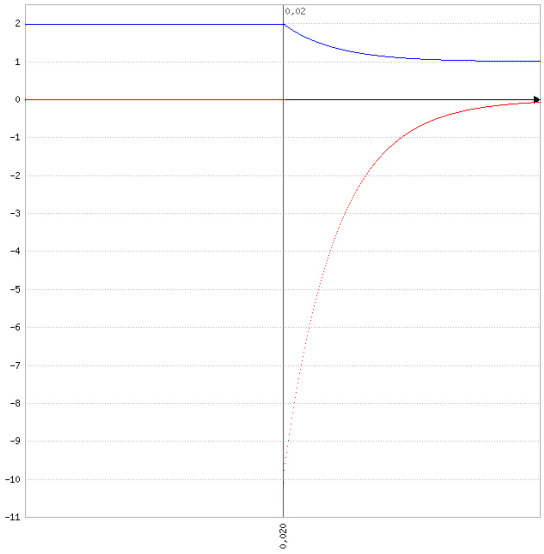


Fig. 7.20 – Grafico della funzione $i_L(t)$ in blu e $v_3(t)$ in rosso.

Nel grafico di Fig. 7.20, abbiamo rappresentato $i_L(t)$ e $v_3(t)$ anche per t<0.02s. La $v_3(t)$, per t<0.02s, è nulla in quanto derivata di una funzione costante. Possiamo osservare che essa, come c'era da aspettarsi, risulta discontinua in t=0.02s.

2 Le configurazioni critiche

2.1 I circuiti mal modellati

Perché non abbiamo considerato il circuito Fig. 7.21 e il circuito di Fig. 7.22? Cosa c'è che non va in questi schemi?

Se determiniamo le equazioni di stato dei due circuiti, operando analogamente a quanto fatto per i circuiti dei paragrafi precedenti, otteniamo per quello di Fig. 7.21:

$$C\frac{dv_C}{dt} = j(t) \qquad t>t_0 \tag{7.88}$$

con t_0 istante iniziale e $v_C(t_0) = V_{C0}$, e per quello di Fig. 7.22:

$$L\frac{di_L}{dt} = e(t) \qquad t>t_0 \tag{7.89}$$

con t_0 istante iniziale e $i_L(t_0)=I_{L0}$. Osserviamo che, nonostante nei circuiti di Fig. 7.21 e Fig. 7.22 vi siano dei resistori, le equazioni (7.88) e (7.89) mancano del termine non derivato moltiplicato, rispettivamente, per la conduttanza (vedi la (7.3)) e per la resistenza (vedi la (7.49)).

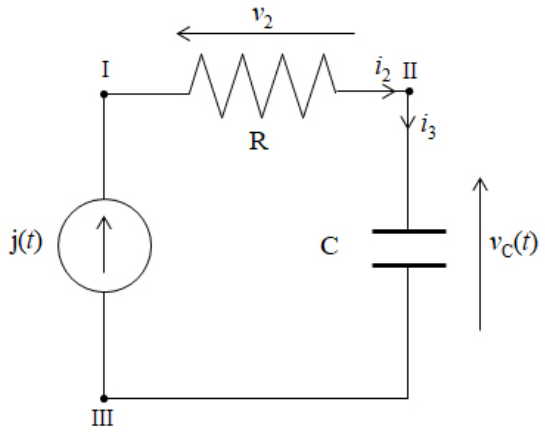


Fig. 7.21 – Circuito RC con generatore di corrente in serie.

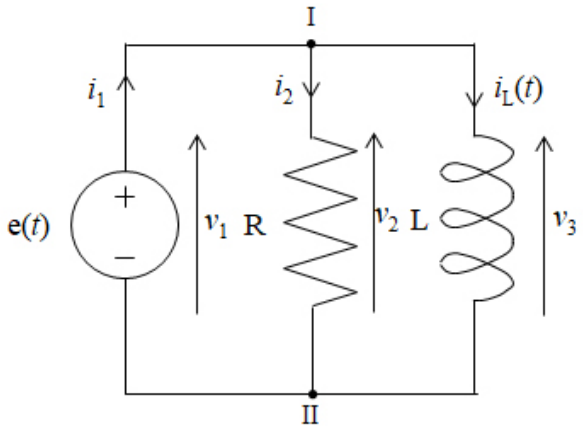


Fig. 7.22 – Circuito RL con generatore di tensione in parallelo.

Il motivo dell'assenza del contributo delle resistenze è che, nel primo caso, abbiamo un generatore di corrente in serie all'elemento dinamico condensatore, e, nel secondo caso, abbiamo un generatore di tensione in parallelo all'elemento dinamico induttore. Ricordandoci, dalla Lezione 2, che i generatori reali di tensione e corrente vogliono rispettivamente una resistenza in serie e in parallelo, comprendiamo che nei circuiti di Fig. 7.21 e Fig. 7.22, le resistenze considerate non servono a modellare correttamente i generatori reali risultando superflue.

Le equazioni (7.88) e (7.89) possono essere comunque risolte e daranno delle soluzioni indipendenti dalla presenza delle resistenze. Le variabili di stato, dunque, dipendono unicamente dai generatori ideali. Vediamo come. Supponiamo che le funzioni j(*t*) e e(*t*) realizzate dai generatori siano funzioni integrabili. Allora, integrando la (7.88) otteniamo:

$$v_C(t)=v_C(t_0)+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} j(t)\,dt = v_C(t_0)+\frac{1}{C}\left[j'(t)-j'(t_0)\right] \qquad (7.90)$$

dove j'(*t*) è la primitiva della funzione j(*t*).

Integrando la (7.89):

$$i_L(t)=i_L(t_0)+\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} e(t)\,dt = i_L(t_0)+\frac{1}{L}\left[e'(t)-e'(t_0)\right] \qquad (7.91)$$

dove e'(*t*) è la primitiva della funzione e(*t*).

Per comprendere ancora meglio l'inefficacia delle resistenze poste nei circuiti di Fig. 7.21 e Fig. 7.22, si osservi che le equazioni (7.88) e (7.89) si potrebbero ottenere anche dai

circuiti rispettivamente di Fig. 7.23 e Fig. 7.24. Questo non deve sorprenderci in quanto determinando il circuito equivalente secondo Norton e Thevenin rispettivamente nei circuiti di Fig. 7.21 e Fig. 7.22 otteniamo quelli di Fig. 7.23 e Fig. 7.24.

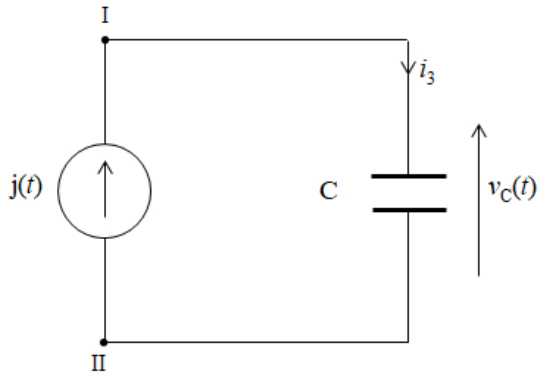


Fig. 7.23 – Circuito capacitivo ideale privo di resistenza con generatore di corrente.

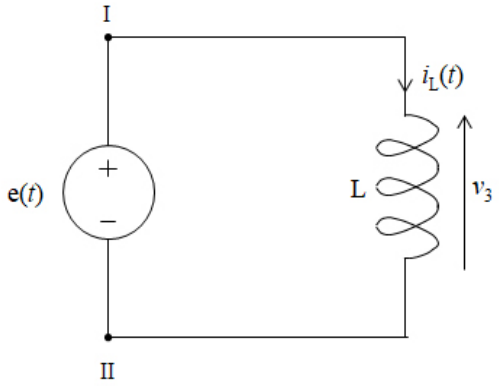


Fig. 7.24 – Circuito induttivo ideale privo di resistenza con generatore di tensione.

Dalle (7.90) e (7.91) deduciamo che i circuiti considerati, anche se idealizzati, realizzano la carica del condensatore e dell'induttore riuscendo a garantire la continuità delle variabili di stato. Bisognerà scegliere, però, opportunamente la funzione realizzata dai generatori. Ad esempio, non dobbiamo scegliere generatori costanti altrimenti i due elementi dinamici permangono nel loro valore di regime. Sottolineiamo che in questi due casi considerati non si osservano fenomeni transitori in quanto le variabili di stato seguono istante per istante il forzamento.

É bene comprendere, a questo punto, che gli ultimi ragionamenti fatti lasciano il tempo che trovano…. I circuiti che abbiamo appena studiato sono troppo idealizzati e quindi non

realizzabili. Abbiamo cioè considerato un modello troppo idealizzato di un sistema fisico reale. L'assenza di una resistenza nei circuiti considerati li rende "eccessivamente idealizzati". Non abbiamo tenuto conto, nel modello circuitale, della presenza nel circuito reale di effetti resistivi, presenti essenzialmente nei generatori e negli elementi dinamici[11]. Allo scopo di modellare i circuiti ed i sistemi elettrici con il modello circuitale in maniera accurata, possiamo trascurare la presenza degli effetti resistivi dei componenti (mai completamente trascurabili) solo rispetto ad altre resistenze opportunamente inserite nel nostro circuito.

2.2 I circuiti mal posti

Ai circuiti di Fig. 7.21 e Fig. 7.22 possiamo aggiungere i loro duali. Consideriamo i circuiti di Fig. 7.25 e Fig. 7.26 che diremo ***mal posti***. Vediamo perché.

Osserviamo, ad esempio, il circuito RC di Fig. 7.25, avremmo:

$$v_C(t) = e(t) \qquad t>t_0 \tag{7.92}$$

con t_0 istante iniziale. Quindi la tensione sul condensatore uguaglierebbe in ogni istante la tensione sul generatore ideale di tensione. Non ci sono transitori come nel caso precedente, ma questa volta invece di avere una equazione differenziale come la (7.88) che salvaguarda la continuità della variabile di stato (vedi la (7.90)), abbiamo una identità istantanea tra variabile di stato e tensione del generatore che potrebbe violare la continuità della variabile di stato oltre ad imporre eventuali discontinuità del generatore stesso[12].

Lo stesso discorso vale per il circuito di Fig. 7.26:

---

[11] Il condensatore e l'induttore sono sempre stati considerati ideali, ma in realtà i componenti fisici reali presentano componenti resistive dovute alla presenza di conduttori. Per questo motivo il circuito RC serie (vedi § 1.1) e il circuito RL parallelo (vedi § 1.3) rappresentano, rispettivamente, il più semplice e completo modello circuitale dei due componenti dinamici. La resistenza dell'RC serie rappresenta la serie tra la resistenza del generatore e quella del condensatore mentre la resistenza parallelo dell'RL parallelo rappresenta il parallelo tra la resistenza del generatore quella dell'induttore.

[12] Non è facile nella realtà realizzare una discontinuità nei generatori. Tuttavia, è possibile andarci molto vicino e realizzare funzioni con derivata molto elevata in brevi intervalli di tempo. Nel caso dei circuiti di Fig. 7.25 e Fig. 7.26 le variabili di stato seguirebbero l'andamento dei generatori e darebbero luogo a valori di corrente (per il condensatore) e tensione (per l'induttore) molto elevati e quindi verosimilmente non corrispondenti ad un circuito fisicamente realizzato con accuratezza.

$$i_L(t) = j(t) \qquad t > t_0 \tag{7.93}$$

con t_0 istante iniziale.

In entrambi i casi considerati abbiamo modellato in maniera poco accurata dei sistemi fisici reali, trascurandone i reali effetti resistivi. I circuiti di Fig. 7.25 e Fig. 7.26 rappresentano dei ***circuiti mal posti***. Per tali circuiti non ha senso cercare una soluzione, ma piuttosto si tratta di ripensare il modello utilizzato tenendo conto di effetti resistivi presenti nel sistema reale e trascurati nel modello.

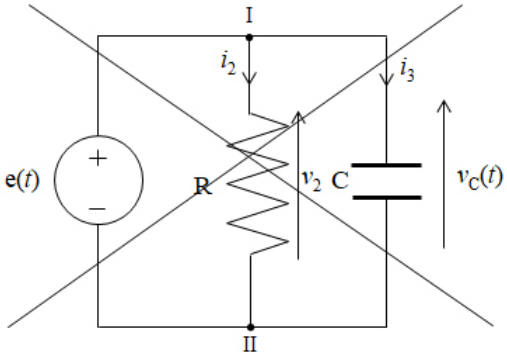


Fig. 7.25 – Circuito capacitivo mal posto.

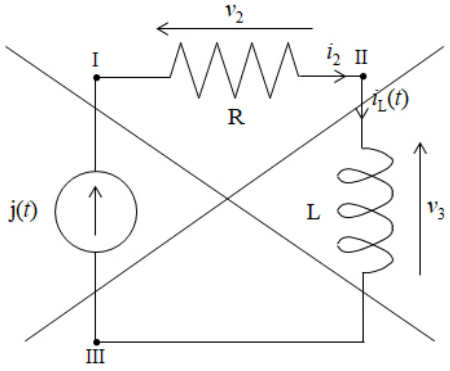


Fig. 7.26 – Circuito induttivo mal posto.

Quanto visto in questo paragrafo lo possiamo generalizzare:

un circuito in cui vi siano generatori di tensione ideali in parallelo a condensatori o generatori di corrente ideali in serie ad induttori è un ***circuito mal posto***.

3 I circuiti RC e RL con più resistenze

Complichiamo le cose introducendo nei circuiti del § 1 altre resistenze.

3.1 Circuito RC con due resistenze

Inseriamo, nel circuito RC serie di Fig. 7.1, una resistenza non nulla[13] in parallelo al condensatore, ottenendo il circuito di Fig. 7.27. Per tale circuito è facile verificare che, essendoci solo due maglie ed escludendo il nodo III, il sistema di equazioni circuitali risulta:

$$\begin{cases} i_1(t) - i_2(t) = 0 \\ i_2(t) - i_3(t) - i_4(t) = 0 \\ v_1(t) + v_2(t) - v_C(t) = 0 \\ v_C(t) - v_4(t) = 0 \\ v_1(t) = e(t) \\ v_2(t) = -R_1 i_2(t) \\ v_4(t) = R_2 i_4(t) \\ i_3(t) = C\dfrac{dv_C(t)}{dt} \end{cases} \tag{7.94}$$

con $t>t_0$ istante iniziale.

Nel sistema di equazioni (7.94) si osservi che la relazione caratteristica del resistore R_1 è stata scritta con il segno negativo in quanto su questo bipolo è stata fatta la convenzione del generatore.

[13] Se ammettessimo la possibilità che la resistenza introdotta possa essere nulla, significherebbe aver messo in corto circuito il condensatore e questo non è accettabile in quanto imporremmo tensione nulla ai suoi capi, in contrasto con eventuali condizioni iniziali della tensione non nulle. Mettere in corto circuito un condensatore è una eccessiva idealizzazione in quanto si trascurerebbe la presenza di una resistenza, seppur piccolissima, presente nel conduttore del corto circuito che garantirebbe la continuità della tensione del condensatore.

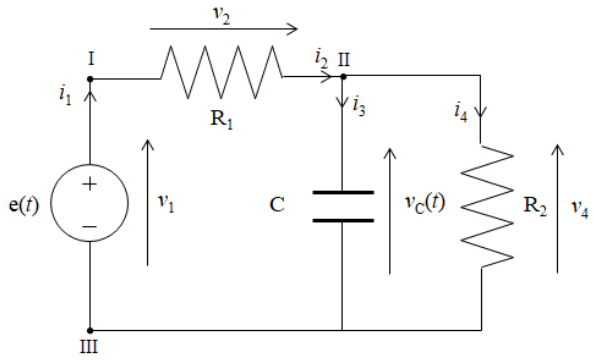


Fig. 7.27 – Esempio di circuito RC con due resistenze.

Nel sistema (7.94), sostituiamo le relazioni caratteristiche nelle leggi di Kirchhoff:

$$\begin{cases} i_1(t) - i_2(t) = 0 \\ i_2(t) - \mathrm{C}\dfrac{dv_\mathrm{C}(t)}{dt} - i_4(t) = 0 \\ \mathrm{e}(t) - \mathrm{R}_1 i_2(t) - v_\mathrm{C}(t) = 0 \\ v_\mathrm{C}(t) - \mathrm{R}_2 i_4(t) = 0 \end{cases} \tag{7.95}$$

A noi interessa trovare una sola equazione nella incognita variabile di stato $v_C(t)$. Allora eliminiamo dal sistema (7.95) le incognite $i_1(t)$, $i_2(t)$ e $i_4(t)$. Cominciamo da $i_1(t)$:

$$\begin{cases} i_2(t) - \mathrm{C}\dfrac{dv_\mathrm{C}(t)}{dt} - i_4(t) = 0 \\ \mathrm{e}(t) - \mathrm{R}_1 i_2(t) - v_\mathrm{C}(t) = 0 \\ v_\mathrm{C}(t) - \mathrm{R}_2 i_4(t) = 0 \end{cases} \tag{7.96}$$

Procediamo con $i_2(t)$:

$$\begin{cases} \mathrm{e}(t) - \mathrm{R}_1\mathrm{C}\dfrac{dv_\mathrm{C}(t)}{dt} - \mathrm{R}_1 i_4(t) - v_\mathrm{C}(t) = 0 \\ v_\mathrm{C}(t) - \mathrm{R}_2 i_4(t) = 0 \end{cases} \tag{7.97}$$

Eliminiamo infine $i_4(t)$ e mettiamo l'equazione sotto forma di equazione di stato

$$\mathrm{C}\frac{dv_\mathrm{C}(t)}{dt} = -\frac{v_\mathrm{C}(t)}{\mathrm{R}_{eq}} + \frac{1}{\mathrm{R}_1}\mathrm{e}(t) \qquad t > t_0 \tag{7.98}$$

dove

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \tag{7.99}$$

è la resistenza equivalente che dobbiamo considerare al posto della semplice resistenza R incontrata nel caso della equazione (7.3) per il calcolo della costante di tempo τ, che introdotta porta a riscrivere la (7.98) come:

$$\frac{dv_C(t)}{dt} = -\frac{v_C(t)}{\tau} + \frac{1}{\tau}\frac{R_2}{R_1 + R_2} e(t) \qquad t>t_0 \tag{7.100}$$

con la costante di tempo:

$$\tau = R_{eq} C = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C \tag{7.101}$$

Guardiamo la (7.100) con la costante di tempo (7.101) e osserviamo che per ottenere il circuito RC serie, e quindi la (7.3) con la costante di tempo (7.4), dobbiamo mandare all'infinito la resistenza R_2. Se a questa diamo un valore limitato (non nullo), significa aver introdotto un nuovo parametro su cui è possibile agire per variare la costante di tempo (7.101) e il forzamento presente nella (7.100). La R_2 consente di diminuire la costante di tempo τ a partire dal suo valore massimo R_1C e diminuire il valore del forzamento a partire da un valore massimo pari al generatore ideale $e(t)$. In altre parole, la resistenza R_2 aumenta l'"inerzia" del circuito RC serie che diventa più lento a rispondere ad un forzamento di valore ridotto. Quindi la carica del condensatore risulta meno efficace in velocità.

In base alla (7.9) possiamo dire che l'integrale generale della (7.100) risulterà:

$$v_C(k,t) = k e^{-\frac{1}{\tau}(t-t_0)} + v_{Cp}(t) \qquad t>t_0 \tag{7.102}$$

La costante k è da determinare utilizzando le condizioni iniziali e la conoscenza della soluzione particolare $v_{Cp}(t)$.

Risolviamo il circuito con i dati:

DATI: t_0=0, R_1=10Ω, R_2=20Ω, C=0,5 mF, $v_C(0)=V_{C0}$=3V, $e(t)$= 3 $u(t)$ V. La funzione gradino unitario $u(t)$ l'abbiamo definita nella (6.88) della Lezione 6.

Abbiamo che il problema di Cauchy è così formulato:

$$\begin{cases} \dfrac{dv_C(t)}{dt} + \dfrac{1}{\tau} v_C(t) = \dfrac{e^*(t)}{\tau} & t>0 \\ v_C(t)\big|_{t=0} = V_{C0}=2V \end{cases} \tag{7.103}$$

con:

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2} = \frac{20}{3}\Omega \tag{7.104}$$

e

$$\tau=R_{eq}C = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}C=\frac{1}{3}10^{-2}s \tag{7.105}$$

e

$$e^*(t) = \frac{R_2}{R_1+R_2} e(t) = 2V \qquad t>0 \tag{7.106}$$

La soluzione particolare $v_{Cp}(t)$ la possiamo calcolare direttamente dal circuito di Fig. 7.28 che rappresenta quello di Fig. 7.27 a regime stazionario.

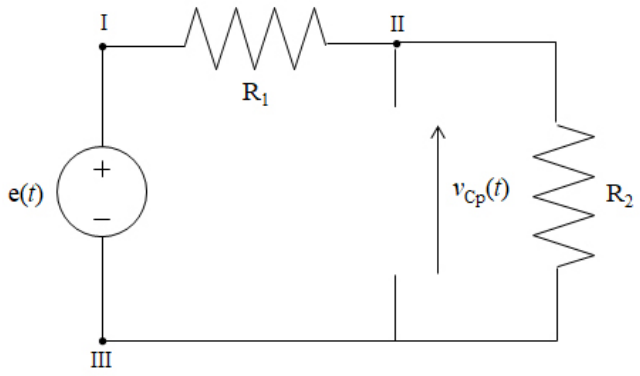


Fig. 7.28 – Circuito della Fig. 7.27 a regime stazionario.

Osserviamo che, in regime stazionario, il condensatore si comporta come un circuito aperto e quindi per calcolare $v_{Cp}(t)$ possiamo utilizzare un partitore di tensione tra i due resistori presenti essendo il condensatore in parallelo al resistore R_2:

$$v_{Cp}(t) = \frac{R_2}{R_1+R_2} e(t) = e^*(t) = 2V \qquad t>0 \tag{7.107}$$

Si osservi che:

- come sarà chiaro nel prossimo § 4, la soluzione particolare (7.107) poteva essere ottenuta anche dal circuito equivalente secondo Thevenin del circuito di Fig. 7.27, e cioè uno come quello di Fig. 7.1, avente un generatore di tensione che eroga una tensione pari a e*(*t*) (vedi la (7.106)), uguale, cioè, alla tensione a vuoto calcolata ai terminali del condensatore C[14].
- considerando l'equazione differenziale del problema (7.103) osserviamo che a regime stazionario possiamo scrivere:

$$\underbrace{\frac{dv_{Cp}(t)}{dt}}_{=0}+\frac{1}{\tau}v_{Cp}(t)=\frac{e^*(t)}{\tau}\Rightarrow v_{Cp}(t)=e^*(t)=\frac{R_2}{R_1+R_2}e(t)\qquad t>0 \qquad (7.108)$$

Tutto torna!

L'integrale generale quindi sarà:

$$v_C(k,t)=k\,e^{-3000t}+2\qquad t>0 \qquad (7.109)$$

Infine, ci resta da calcolare la k imponendo le condizioni iniziali:

$$v_C(0)=k+2=3\Rightarrow k=1 \qquad (7.110)$$

In conclusione, la soluzione cercata sarà:

$$v_C(t)=\left(e^{-3000t}+2\right)V\qquad t>0 \qquad (7.111)$$

Abbiamo rappresentato nella Fig. 7.29, con una curva blu, il grafico della funzione (7.111).

Per calcolare le altre grandezze del circuito possiamo utilizzare le altre equazioni del sistema. Qui calcoliamo unicamente la corrente del condensatore, lasciando per esercizio il calcolo delle altre grandezze. Dalla relazione caratteristica del condensatore e dalla (7.111) abbiamo:

[14] La tensione a vuoto per il calcolo di Thevenin si sarebbe calcolata con un partitore di tensione tra R_1 e R_2 come espresso, appunto, nella formula (7.106).

$$i_3(t) = \mathrm{C}\frac{dv_\mathrm{C}(t)}{dt} = -1.5 \times \mathrm{e}^{-3000t}\,\mathrm{A} \qquad t>0 \tag{7.112}$$

che abbiamo rappresentato con una curva rossa nella Fig. 7.29.

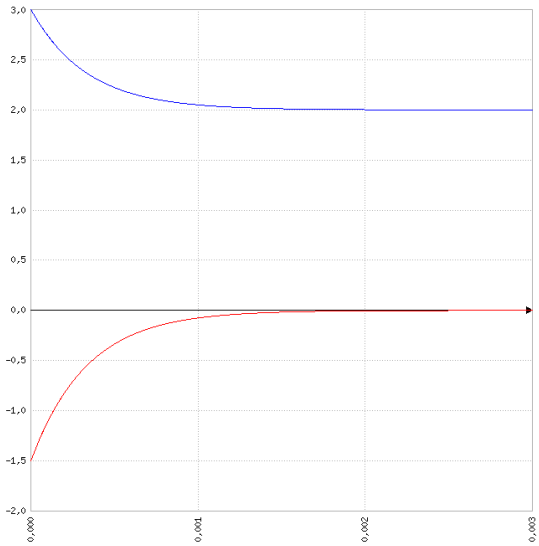


Fig. 7.29 – Grafico della funzione (7.111) in blu e (7.112) in rosso.

3.2 Circuito RL con due resistenze

Inseriamo, nel circuito RL parallelo di Fig. 7.12, una resistenza di valore limitato[15] in serie all'induttore, ottenendo il circuito di Fig. 7.30. Per tale circuito è facile verificare che, essendoci solo due maglie ed escludendo il nodo III, il sistema di equazioni circuitali risulta:

[15] Se ammettessimo la possibilità che la resistenza introdotta possa essere infinita, significherebbe aver messo in serie all'induttore un circuito aperto e questo significherebbe imporre una corrente nulla all'induttore.

$$\begin{cases} i_1(t) - i_2(t) - i_L(t) = 0 \\ i_L(t) - i_4(t) = 0 \\ v_2(t) - v_3(t) + v_4(t) = 0 \\ v_1(t) - v_2(t) = 0 \\ i_1(t) = \mathrm{j}(t) \\ v_2(t) = \mathrm{R}_1 i_2(t) \\ v_4(t) = -\mathrm{R}_2 i_4(t) \\ v_3(t) = \mathrm{L}\dfrac{di_L(t)}{dt} \end{cases} \tag{7.113}$$

con $t > t_0$ istante iniziale.

Nel sistema di equazioni (7.113) si osservi che la relazione caratteristica del resistore R_2 è stata scritta con il segno negativo in quanto su questo bipolo è stata fatta la convenzione del generatore.

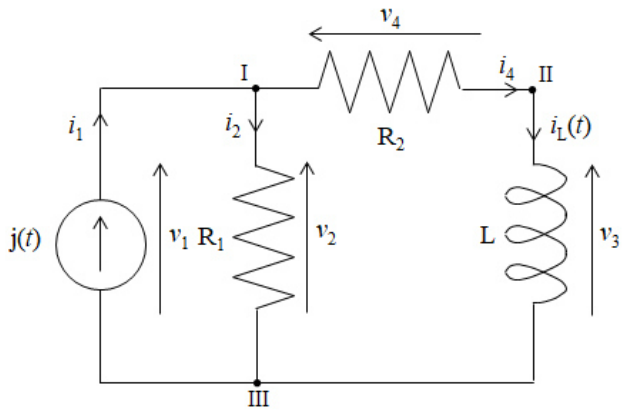


Fig. 7.30 – Esempio di circuito RL con due resistenze.

Nel sistema (7.113), sostituiamo le relazioni caratteristiche nelle leggi di Kirchhoff:

$$\begin{cases} \mathrm{j}(t) - i_2(t) - i_L(t) = 0 \\ i_L(t) - i_4(t) = 0 \\ \mathrm{R} i_2(t) - \mathrm{L}\dfrac{di_L(t)}{dt} - \mathrm{R} i_4(t) = 0 \\ v_1(t) - \mathrm{R}_2 i_2(t) = 0 \end{cases} \tag{7.114}$$

A noi interessa trovare una sola equazione avente come incognita la variabile di stato $i_L(t)$. Allora eliminiamo dal sistema (7.114) le incognite $v_1(t)$, $i_2(t)$ e $i_4(t)$ combinando le equazioni tra di loro. Cominciamo da $v_1(t)$:

$$\begin{cases} i_2(t) = \mathrm{j}(t) - i_L(t) \\ i_L(t) - i_4(t) = 0 \\ R_1 \mathrm{j}(t) - R_1 i_L(t) - L\dfrac{di_L(t)}{dt} - R_2 i_4(t) = 0 \end{cases} \tag{7.115}$$

Procediamo con $i_2(t)$:

$$\begin{cases} i_L(t) - i_4(t) = 0 \\ R_1 i_L(t) + L\dfrac{di_L(t)}{dt} + R_2 i_4(t) - R_1 \mathrm{j}(t) = 0 \end{cases} \tag{7.116}$$

Eliminiamo infine $i_4(t)$ e mettiamo l'equazione sotto forma di equazione di stato

$$L\frac{di_L(t)}{dt} = -R_{eq} i_L(t) + R_1 \mathrm{j}(t) \qquad t>t_0 \tag{7.117}$$

dove

$$R_{eq} = R_1 + R_2 \tag{7.118}$$

è la resistenza equivalente che dobbiamo considerare al posto della semplice resistenza R del caso della equazione (7.49) per il calcolo della costante di tempo τ, che introdotta porta a riscrivere la (7.117) come:

$$\frac{di_L(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau} i_L(t) + \frac{1}{\tau}\frac{R_1}{(R_1 + R_2)} \mathrm{j}(t) \qquad t>t_0 \tag{7.119}$$

con la costante di tempo:

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}} = \frac{L}{R_1 + R_2} \tag{7.120}$$

Guardiamo la (7.119) con la costante di tempo (7.120) e osserviamo che per ottenere il circuito RL parallelo, e quindi la (7.49) con la costante di tempo (7.50), dobbiamo mandare a zero la resistenza R_2. Se a questa diamo un valore limitato (non nullo), significa

aver introdotto un nuovo parametro su cui è possibile agire per variare la costante di tempo (7.120) e il forzamento presente nella (7.100). La R_2 consente di diminuire la costante di tempo τ a partire dal suo valore massimo L/R_1 e diminuire il valore del forzamento a partire da un valore massimo pari al generatore ideale $j(t)$. In altre parole, la resistenza R_2 aumenta l'"inerzia" del circuito RL parallelo che diventa più lento a rispondere ad un forzamento di valore ridotto.

In base alla (7.55) possiamo dire che l'integrale generale della (7.119) risulterà:

$$i_L(k,t) = ke^{-\frac{1}{\tau}(t-t_0)} + i_{Lp}(t) \qquad t>t_0 \tag{7.121}$$

La costante k è da determinare utilizzando le condizioni iniziali e la conoscenza della soluzione particolare $i_{Lp}(t)$.

Risolviamo il circuito con i dati:

DATI: t_0=0, R_1=10Ω, R_2=20Ω, L=100mH, $i_L(0)$=3A, $j(t)$= 3 $u(t)$ A. La funzione gradino unitario $u(t)$ l'abbiamo definita nella (6.88) della Lezione 6.

Abbiamo che il problema di Cauchy è così formulato:

$$\begin{cases} \dfrac{di_L(t)}{dt} + \dfrac{1}{\tau} i_L(t) = \dfrac{j^*(t)}{\tau} \\ i_L(0) = I_{L0} = 3 \end{cases} \qquad t>0 \tag{7.122}$$

con:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 = 30\Omega \tag{7.123}$$

e

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}} = \frac{L}{R_1 + R_2} = \frac{1}{3} \times 10^{-2}\,s \tag{7.124}$$

e

$$j^*(t) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} j(t) = 1A \qquad t>0 \tag{7.125}$$

La soluzione particolare $i_{Lp}(t)$ la possiamo calcolare direttamente dal circuito di Fig. 7.31 che rappresenta quello di Fig. 7.30 in regime stazionario.

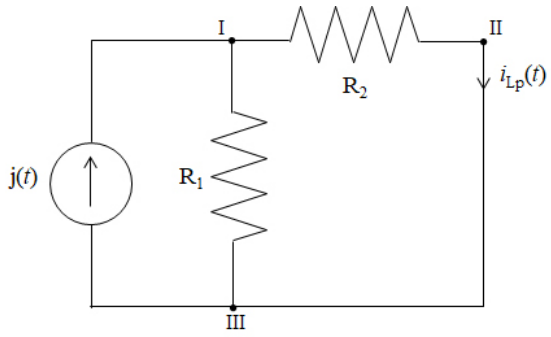


Fig. 7.31 – Circuito della Fig. 7.30 a regime stazionario.

Osserviamo che, a regime stazionario, l'induttore si comporta come un corto circuito e quindi per calcolare $i_{Lp}(t)$ possiamo utilizzare un partitore di corrente tra i due resistori presenti:

$$i_{Lp}(t) = \frac{R_1}{R_1+R_2} j(t) = j^*(t) = \frac{10}{30} 3 = 1A \qquad t>0 \qquad (7.126)$$

Si osservi che:

- come sarà chiaro nel prossimo § 4, la soluzione particolare (7.126) poteva essere ottenuta anche dal circuito equivalente secondo Norton del circuito di Fig. 7.30, e cioè uno come quello di (7.12), avente per generatore di corrente uno di valore $j^*(t)$ (vedi la (7.125)), uguale alla corrente di corto circuito calcolata sull'induttore L[16].
- considerando l'equazione differenziale del problema (7.103) osserviamo che a regime stazionario possiamo scrivere:

$$\underbrace{\frac{di_{Lp}(t)}{dt}}_{=0} + \frac{1}{\tau} i_{Lp}(t) = \frac{j^*(t)}{\tau} \Rightarrow i_{Lp}(t) = j^*(t) = \frac{R_1}{R_1+R_2} j(t) \qquad t>0 \qquad (7.127)$$

Tutto torna!

L'integrale generale quindi sarà:

[16] La corrente di corto circuito per il calcolo di Norton si sarebbe calcolata con un partitore di corrente tra R_1 e R_2 come espresso, appunto, nella formula (7.125)(7.106).

$$i_L(k,t) = ke^{-300t} + 1 \qquad t>0 \tag{7.128}$$

Infine, ci rimane da calcolare la k imponendo le condizioni iniziali:

$$i_L(0) = k + 1 = 3 \Rightarrow k = 2 \tag{7.129}$$

In conclusione, la soluzione cercata sarà:

$$i_L(t) = \left(2 \times e^{-300t} + 1\right) A \qquad t>0 \tag{7.130}$$

Abbiamo rappresentato nella Fig. 7.32 con una curva blu, il grafico della funzione (7.130).

Per calcolare le altre grandezze del circuito possiamo utilizzare le altre equazioni del sistema. Qui calcoliamo unicamente la tensione dell'induttore, lasciando per esercizio il calcolo delle altre grandezze. Dalla relazione caratteristica dell'induttore e dalla (7.130) abbiamo:

$$v_3(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} = -60 \times e^{-300t} V \qquad t>0 \tag{7.131}$$

che abbiamo rappresentato con una curva rossa nella Fig. 7.32.

☺

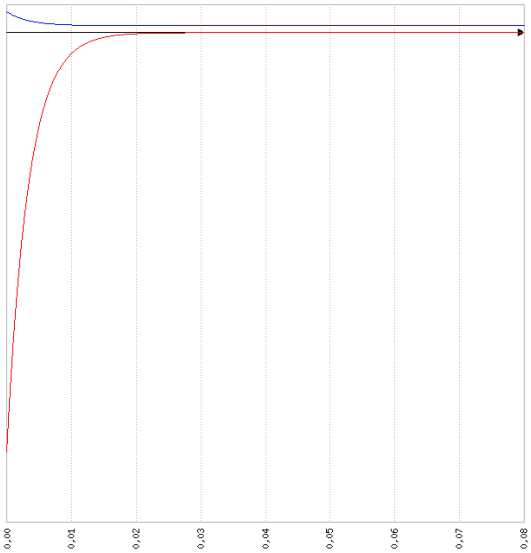


Fig. 7.32 – Grafico della funzione (7.130) in blu e (7.131) in rosso.

3.3 Circuito RC con tre resistenze

Consideriamo il circuito di Fig. 7.33. Il circuito è stato ottenuto inserendo in serie al condensatore del circuito di Fig. 7.27 un'altra resistenza. È facile verificare che, essendoci ancora solo due maglie ed escludendo il nodo IV, in questo caso il sistema di equazioni circuitali risulta:

$$\begin{cases} i_1(t) - i_2(t) = 0 \\ i_2(t) - i_3(t) - i_5(t) = 0 \\ i_3(t) - i_C(t) = 0 \\ v_1(t) - v_2(t) - v_3(t) - v_C(t) = 0 \\ v_3(t) + v_C(t) - v_5(t) = 0 \\ v_1(t) = e(t) \\ v_2(t) = R_1 i_2(t) \\ v_3(t) = R_2 i_3(t) \\ i_C(t) = C\dfrac{dv_C(t)}{dt} \\ v_5(t) = R_3 i_5(t) \end{cases} \tag{7.132}$$

con $t > t_0$.

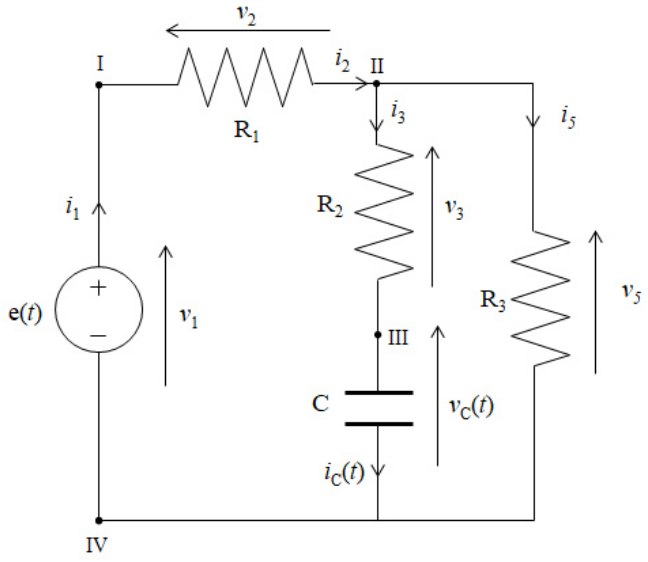


Fig. 7.33 – Esempio di circuito RC con tre resistenze.

Nel sistema (7.132) sostituiamo le relazioni caratteristiche nelle leggi di Kirchhoff:

$$\begin{cases} i_1(t) - i_2(t) = 0 \\ i_2(t) - i_3(t) - i_5(t) = 0 \\ i_3(t) - \mathrm{C}\dfrac{dv_\mathrm{C}(t)}{dt} = 0 \\ \mathrm{e}(t) - \mathrm{R}_1 i_2(t) - \mathrm{R}_2 i_3(t) - v_\mathrm{C}(t) = 0 \\ \mathrm{R}_2 i_3(t) + v_\mathrm{C}(t) - \mathrm{R}_3 i_5(t) = 0 \end{cases} \tag{7.133}$$

A noi interessa trovare una sola equazione nella incognita la variabile di stato $v_C(t)$. Allora eliminiamo dal sistema (7.133) le incognite $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$ e $i_5(t)$. Cominciamo da $i_1(t)$:

$$\begin{cases} i_2(t) - i_3(t) - i_5(t) = 0 \\ i_3(t) - \mathrm{C}\dfrac{dv_\mathrm{C}(t)}{dt} = 0 \\ \mathrm{e}(t) - \mathrm{R}_1 i_2(t) - \mathrm{R}_2 i_3(t) - v_\mathrm{C}(t) = 0 \\ \mathrm{R}_2 i_3(t) + v_\mathrm{C}(t) - \mathrm{R}_3 i_5(t) = 0 \end{cases} \tag{7.134}$$

Procediamo con $i_2(t)$:

$$\begin{cases} i_3(t) - \mathrm{C}\dfrac{dv_\mathrm{C}(t)}{dt} = 0 \\ \mathrm{e}(t) - \mathrm{R}_1 \mathrm{i}_3(t) - \mathrm{R}_1 i_5(t) - \mathrm{R}_2 i_3(t) - v_\mathrm{C}(t) = 0 \\ \mathrm{R}_2 i_3(t) + v_\mathrm{C}(t) - \mathrm{R}_3 i_5(t) = 0 \end{cases} \tag{7.135}$$

Eliminiamo ora $i_3(t)$:

$$\begin{cases} \mathrm{e}(t) - (\mathrm{R}_1 + \mathrm{R}_2)\mathrm{C}\dfrac{dv_\mathrm{C}(t)}{dt} - \mathrm{R}_1 i_5(t) - v_\mathrm{C}(t) = 0 \\ \mathrm{R}_2\mathrm{C}\dfrac{dv_\mathrm{C}(t)}{dt} + v_\mathrm{C}(t) - \mathrm{R}_3 i_5(t) = 0 \end{cases} \tag{7.136}$$

e infine, eliminando $i_5(t)$ mettiamo l'equazione sotto forma di equazione di stato:

$$\mathrm{C}\frac{dv_\mathrm{C}(t)}{dt} = -\frac{\mathrm{R}_1 + \mathrm{R}_3}{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_3 + \mathrm{R}_1\mathrm{R}_2 + \mathrm{R}_2\mathrm{R}_3} v_\mathrm{C}(t) + \frac{\mathrm{R}_3}{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_3 + \mathrm{R}_1\mathrm{R}_2 + \mathrm{R}_2\mathrm{R}_3}\mathrm{e}(t) \tag{7.137}$$

con $t > t_0$ istante iniziale.

Si osservi come ogni termine dell'equazione (7.137) sia omogeneo ad una corrente.

La (7.137) la possiamo riscrivere:

$$\frac{dv_C(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau}v_C(t) + \frac{R_3}{(R_1+R_3)}\frac{1}{\tau}e(t) \qquad t>t_0 \tag{7.138}$$

con:

$$R_{eq} = \frac{R_1R_3+R_1R_2+R_2R_3}{R_1+R_3} \tag{7.139}$$

e

$$\tau = R_{eq}C = \frac{R_1R_3+R_1R_2+R_2R_3}{R_1+R_3}C \tag{7.140}$$

In base alla (7.9), possiamo dire che l'integrale generale della (7.138) risulterà essere:

$$v_C(k,t) = ke^{-\frac{1}{\tau}(t-t_0)} + v_{Cp}(t) \qquad t>t_0 \tag{7.141}$$

La k è da determinare con condizioni iniziali e conoscenza della soluzione particolare che dipende dai generatori.

Risolviamo il circuito di Fig. 7.33 per $t > t_0$ quando i dati sono:

DATI: t_0=0, R_1=5Ω, R_2=2Ω, R_3=5Ω, C=0.2mF, $v_C(0)=V_{C0}$=3V, $e(t)$= $7u(t)$ V. La funzione gradino unitario $u(t)$ l'abbiamo definita nella (6.88) della Lezione 6. Vogliamo calcolare $v_C(t)$ per t>0.

Il problema di Cauchy da risolvere sarà:

$$\begin{cases} \dfrac{dv_C(t)}{dt} = -\dfrac{1}{\tau}v_C(t) + \dfrac{1}{\tau}\dfrac{R_3}{(R_1+R_3)}e(t) & t>0 \\ v_C(0) = V_{C0}=3V \end{cases} \tag{7.142}$$

con $R_{eq} = 4.5\ \Omega$ e $\tau = 9\times10^{-4}$ s.

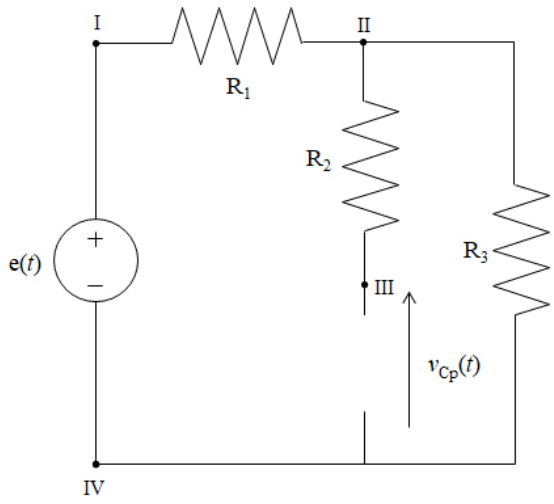


Fig. 7.34 – Circuito di Fig. 7.33 a regime stazionario.

L'integrale generale del problema (7.142) sarà:

$$v_C(t) = \mathrm{k}e^{-1111t} + v_{Cp}(t) \qquad t>0 \tag{7.143}$$

La soluzione particolare si otterrà dalla Fig. 7.34: la tensione a vuoto $v_{Cp}(t)$ è pari alla tensione sul resistore R_3, in quanto non vi sarà tensione su R_2 essendo la corrente nulla. Pertanto, utilizzando un partitore di tensione tra le due resistenze si ottiene:

$$v_{Cp}(t) = \frac{R_3}{R_1+R_3}e(t) = \frac{5}{10}7 = 3.5\mathrm{V} \tag{7.144}$$

Il coefficiente k nella (7.143) (con t_0=0) si calcola imponendo la condizione iniziale:

$$v_C(0) = \mathrm{k} + 3.5 = 3 \Rightarrow \mathrm{k} = -0.5 \tag{7.145}$$

In conclusione, la soluzione sarà:

$$v_C(t) = \left(-0.5\times e^{-1111t} + 3.5\right)\mathrm{V} \qquad t>0 \tag{7.146}$$

Abbiamo rappresentato nella Fig. 7.35, con una curva blu, il grafico della funzione (7.146).

Per calcolare le altre grandezze del circuito possiamo utilizzare le altre equazioni del sistema. Qui calcoliamo unicamente la corrente del condensatore, lasciando per esercizio

il calcolo delle altre grandezze. Dalla relazione caratteristica del condensatore e dalla (7.146) abbiamo:

$$i_C(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt} = 0.\overline{1} \times e^{-1111t}\,A \qquad t>0 \tag{7.147}$$

che abbiamo rappresentato con una curva rossa nella Fig. 7.35.

😊

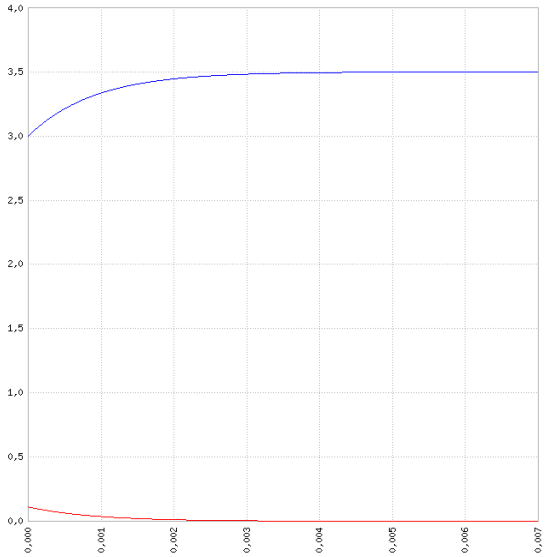


Fig. 7.35 – Grafico della funzione (7.146) in blu e (7.147) in rosso.

4 I circuiti risolti con un circuito equivalente

Ci chiediamo, in riferimento ai circuiti del I ordine: dobbiamo sempre passare per la determinazione di tutte le equazioni del sistema circuitale per poi, dopo lunghi calcoli, pervenire ad un'unica equazione differenziale?

Ci ricordiamo di quanto detto nel § 3.2.4 della Lezione 6 a proposito della possibilità di trovare un circuito equivalente, più semplice di quello che dobbiamo studiare, grazie al teorema di Thevenin o a quello di Norton. Ripetiamo quanto detto nella Lezione 6: ogni circuito del I ordine può essere concepito come abbiamo mostrato in Fig. 7.36 e, così facendo, possiamo sostituire al circuito di partenza un circuito semplificato, come mostrato in Fig. 7.37. In tali circuiti abbiamo che:

- la R_{eq} è la resistenza equivalente vista dall'elemento dinamico, ossia ai morsetti A-B quando il sotto-circuito C è reso passivo;
- la V_0 è la tensione a vuoto ai morsetti A–B e la I_{cc} è la corrente di corto circuito tra i morsetti A–B.

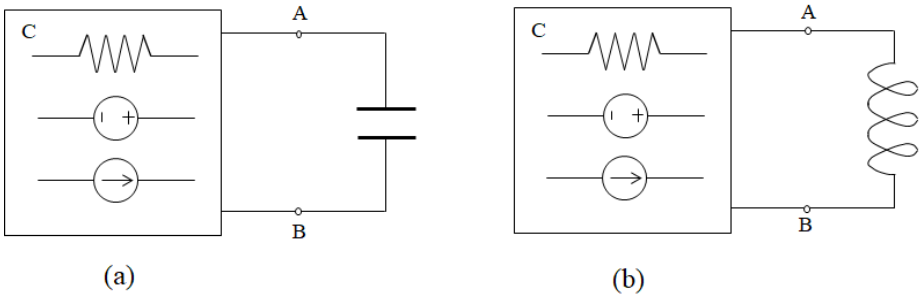


Fig. 7.36 – Circuiti del I ordine: (a) RC, (b) RL.

Si osservi che una volta sostituito il circuito con quello equivalente, non è possibile più accedere al calcolo delle grandezze presenti nel circuito resistivo *C* a cui è collegato l'elemento dinamico, come in Fig. 7.36.

Nel prossimo paragrafo applicheremo quanto detto all'esercizio svolto nel § 3.3 che studiava un circuito RC con tre resistenze.

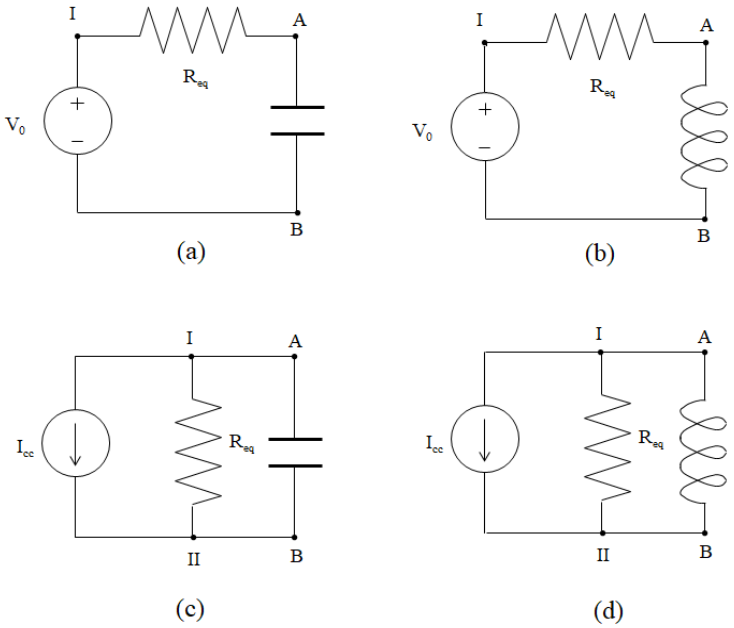


Fig. 7.37 – Possibili circuiti equivalenti: (a) e (c) del circuito (a) di Fig. 7.36; (b) e (d) del circuito (b) di Fig. 7.36.

4.1.1 Circuito RC con tre resistenze

In questo paragrafo vogliamo risolvere il circuito RC con tre resistenze già esaminato nel § 3.3 con il metodo del circuito equivalente.

Il primo passo per la risoluzione dell'esercizio con questo metodo è quello di decidere se vogliamo utilizzare un circuito equivalente secondo Thevenin o Norton. Quello che può orientarci nella decisione è stabilire se è più conveniente calcolare, rispettivamente, la tensione a vuoto o la corrente di corto circuito.

Analizzando il circuito di Fig. 7.33, possiamo scoprire che il calcolo della tensione a vuoto $V_0(t)$ comporta l'eliminazione della resistenza R_2, in quanto in serie ad un circuito aperto, al contrario del calcolo della corrente di c.c. $I_{cc}(t)$[17]. Pertanto, optiamo per il circuito equivalente del caso (a) della Fig. 7.37.

[17] In questo circuito, che è dinamico, data la presenza del condensatore C, le grandezze sono variabili nel tempo poiché lo è, in generale, la tensione del generatore e(t).

Per determinare il circuito equivalente secondo Thevenin cominciamo con il calcolare la R_{eq} vista ai capi del condensatore quando abbiamo reso passivo il circuito adinamico ad esso collegato. Dalla Fig. 7.38 osserviamo[18] che il condensatore vede R_1 e R_3 in parallelo e poi questo parallelo in serie con R_2:

$$R_{eq}=\frac{R_1R_3}{R_1+R_3}+R_2=4.5\Omega \qquad (7.148)$$

dove abbiamo utilizzato i dati forniti nell'esercizio del § 3.3. Si osservi che la R_{eq} calcolata con il metodo del circuito equivalente è uguale a quella calcolata nel § 3.3 in quanto sappiamo che il calcolo della R_{eq} necessaria alla costante di tempo τ si ottiene in modo identico a quella del circuito equivalente di Thevenin (confronta la fine del § 3.2.3 e il § 3.2.4. della Lezione 6).

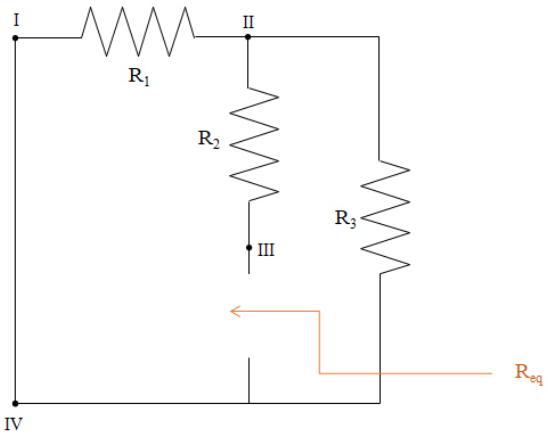


Fig. 7.38 – Circuito di Fig. 7.33 reso passivo per il calcolo della R_{eq}.

Ora dobbiamo calcolare la $V_0(t)$. A tal fine, guardiamo il circuito di Fig. 7.39: come abbiamo già anticipato, in R_2 non c'è corrente e quindi la tensione $V_0(t)$ è quella del resistore R_3. Quindi, La tensione $V_0(t)$ possiamo calcolarla con il partitore di tensione tra R_1 e R_3:

$$V_0(t)=\frac{R_3}{R_1+R_3}e(t)=3.5V \qquad t>0 \qquad (7.149)$$

[18] Ricordiamo che per visualizzare al meglio la topologia del circuito, una volta passivizzata la rete conviene inserire un generatore di caratterizzazione o di prova tra i morsetti A e B.

Si osservi che, al secondo membro della (7.148), abbiamo scelto segno positivo perché i versi di $V_0(t)$ ed $e(t)$ sono in accordo (confronta § 3.1 della Lezione 4).

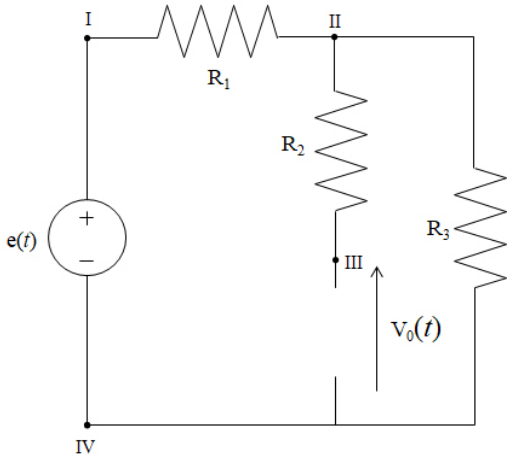


Fig. 7.39 – Circuito di Fig. 7.33 in cui è possibile calcolare la tensione a vuoto $V_0(t)$.

Avendo calcolato la R_{eq} e la $V_0(t)$, possiamo utilizzare il circuito di Fig. 7.40, analogo a quello (a) della Fig. 7.37, per calcolare la funzione $v_C(t)$.

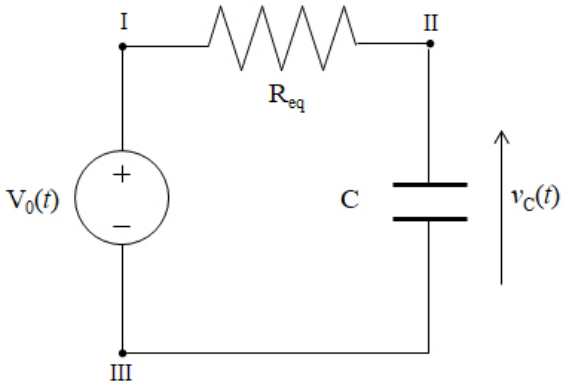


Fig. 7.40 – Circuito equivalente, secondo Thevenin, al circuito di Fig. 7.33.

Dal circuito di Fig. 7.40, utilizzando la stessa procedura usata nel § 1.1.2, otteniamo immediatamente la soluzione:

$$v_C(t) = \left(V_{C0} - V_0(0)\right)e^{-\frac{t}{\tau}} + V_0(t) = \left(-0.5 \times e^{-1111t} + 3.5\right)V \qquad t>0 \qquad (7.150)$$

con $\tau = 9 \times 10^{-4}$ s .

La soluzione (7.150) coincide con quella ottenuta nella (7.146). Questa volta però abbiamo impiegato un numero inferiore di calcoli!

5 I circuiti risolti con un'analisi per intervalli

In questo paragrafo vogliamo studiare circuiti che ci hanno consegnato in un tempo precedente a quello iniziale. La cornice teorica di riferimento è quella studiata nel § 3.4 della Lezione 6. Abbiamo già utilizzato questo metodo nei § 1.1.4 e 1.3.3 di questa lezione. Nel seguito proponiamo altri tre esercizi un po' più complessi.

5.1 Circuito RL con due resistenze

Studiamo ancora il circuito di Fig. 7.30, del § 3.2, ma con dati diversi. I dati sono: DATI: t_0=0, R_1=10Ω, R_2=20Ω, L=100mH, $j(t)$= 1 $u(-t)$ A +2 $u(t)$ A, il circuito si trova a regime per t<0. La funzione gradino unitario $u(t)$ l'abbiamo definita nella (6.88) della Lezione 6. Vogliamo calcolare la corrente nell'induttore per t >0.

Dall'esercizio svolto nel § 3.2, riscriviamo:

$$R_{eq}= R_1+R_2=30\Omega \tag{7.151}$$

e

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}} = \frac{10^{-1}}{30} = \frac{1}{3}10^{-2}\ s \tag{7.152}$$

A differenza dell'esercizio del § 3.2, in questo caso è necessario, per poter disporre della condizione iniziale in t=0, determinare la soluzione $i_L(t)$ per t<0, che chiamiamo $i_{L-}(t)$. Osserviamo che i dati del problema ci dicono che il circuito per t<0 si trova a regime. Tale regime è stazionario poiché il generatore di corrente, $j(t)$=1A, è costante per t<0.

Procediamo con un'analisi per intervalli.

Intervallo t<0.

Sarà necessario fare riferimento ad un circuito come quello di Fig. 7.31 e osservare che, per t<0, si può utilizzare un partitore di corrente e quindi possiamo scrivere:

$$i_{L-}(t) = \frac{R_1}{R_1+R_2}\,j(t) = \frac{1}{3} = 0.\overline{3}A \qquad t<0 \tag{7.153}$$

Dalla (7.153) possiamo conoscere il valore della $i_L(t)$ in t=0:

$$i_{L-}\left(0^{-}\right)=i_{L}\left(0^{+}\right)=i_{L}\left(0\right)=\mathrm{I}_{L0}=\ 0.\overline{3}\mathrm{A} \tag{7.154}$$

che sarà la condizione iniziale dell'evoluzione del circuito per $t>0$.

Intervallo $t>0$

Considerato il problema (7.122) con il generatore (7.125), il problema di Cauchy da risolvere con i dati attuali per $t>0$ sarà:

$$\begin{cases}\dfrac{di_{L}\left(t\right)}{dt}+\dfrac{1}{\tau}i_{L}\left(t\right)=\dfrac{1}{\tau}\dfrac{\mathrm{R}_{1}}{\mathrm{R}_{1}+\mathrm{R}_{2}}\mathrm{j}\left(t\right)=\dfrac{2}{3\tau} & t>0\\ i_{L}\left(0\right)=\mathrm{I}_{L0}=\ 0.\overline{3}\mathrm{A}\end{cases} \tag{7.155}$$

con $\tau=\dfrac{1}{3}10^{-2}\,\mathrm{s}$.

La soluzione particolare del problema (7.155) potremo ancora trovarla con un partitore di corrente così come fatto nell'intervallo $t<0$ per la (7.153):

$$i_{Lp}\left(t\right)=\ \frac{\mathrm{R}_{1}}{\mathrm{R}_{1}+\mathrm{R}_{2}}\mathrm{j}\left(t\right)=\frac{10}{30}2\mathrm{A}=\frac{2}{3}\mathrm{A} \tag{7.156}$$

Il coefficiente k dell'integrale generale si calcola imponendo la condizione iniziale:

$$i_{L}\left(0\right)=\ \mathrm{k}+\frac{2}{3}=0.\overline{3}\Rightarrow\mathrm{k}=-\frac{1}{3}=-0.\overline{3}\mathrm{A} \tag{7.157}$$

In conclusione, la soluzione sarà:

$$i_{L}\left(t\right)=\left(-\frac{1}{3}\times\mathrm{e}^{-300t}+\frac{2}{3}\right)\mathrm{A} \tag{7.158}$$

Il grafico della funzione (7.158) è rappresentato in Fig. 7.41 con una curva blu.

Per calcolare le altre grandezze del circuito possiamo utilizzare le altre equazioni del sistema. Qui calcoliamo unicamente la tensione dell'induttore, lasciando per esercizio il calcolo delle altre grandezze. Dalla relazione caratteristica dell'induttore e dalla (7.158) abbiamo:

$$v_{3}\left(t\right)=\mathrm{L}\frac{di_{L}\left(t\right)}{dt}=10\times\mathrm{e}^{-300t}\mathrm{V}\qquad t>0 \tag{7.159}$$

che abbiamo rappresentato con una curva rossa nella Fig. 7.41.

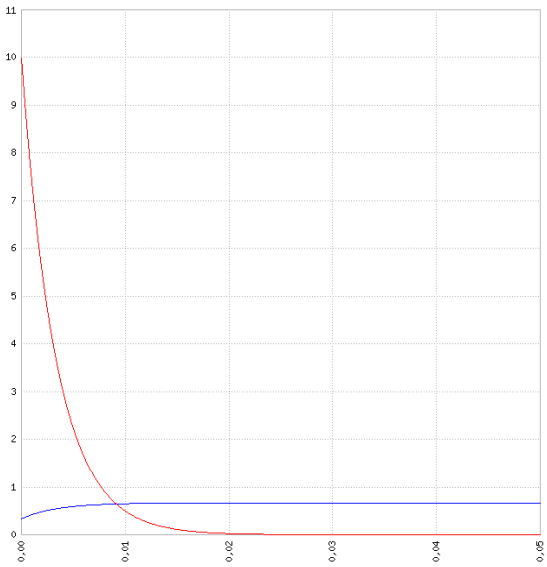


Fig. 7.41 – Grafico della funzione (7.158) in blu e (7.159) in rosso.

5.2 Circuito RL con due resistenze e un interruttore

Studiamo ancora il circuito di Fig. 7.30, del § 3.2, ma questa volta introduciamo un interruttore come mostrato in Fig. 7.42. In questo esercizio il transitorio si "accende" grazie alla variazione nell'istante $t=t_0$ della struttura del circuito: in $t=t_0$ compare il resistore R_2. Supponiamo che il circuito sia a regime stazionario per $t<t_0$ e che quindi assuma la forma della Fig. 7.43, mentre per $t>t_0$ il circuito avrà la forma della Fig. 7.44.

Risolviamo l'esercizio con i dati:

DATI: $t_0=0$, $R_1=10\Omega$, $R_2=20\Omega$, L=100mH, j(t)= 3A, il circuito si trova a regime per $t<0$. Vogliamo calcolare la corrente nell'induttore per $t>0$.

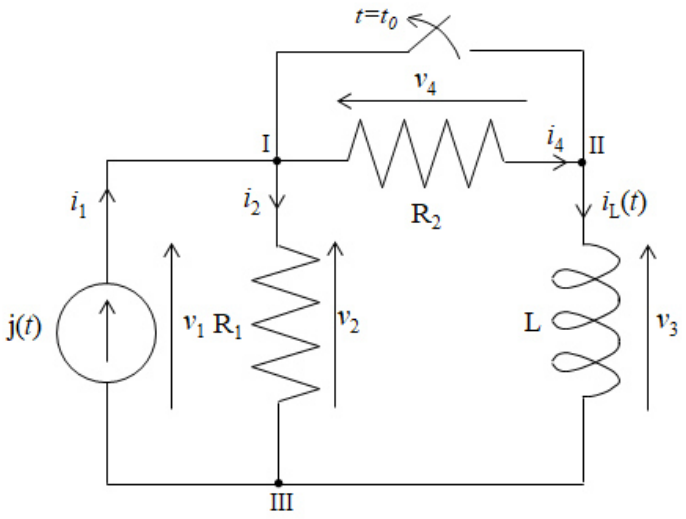


Fig. 7.42 – Circuito RL con due resistenze e interruttore.

Utilizziamo un'analisi per intervalli.

Intervallo t<0.

Per *t*<0 il circuito si trova a regime stazionario, si fa riferimento alla Fig. 7.43 e l'induttore si comporta come un corto circuito. La tensione sul resistore R_1 è nulla (in quanto "cortocircuitata") e quindi anche la corrente, pertanto possiamo affermare che:

$$i_{L-}(t) = \mathrm{j}(t) = 3\mathrm{A} \qquad t<0 \tag{7.160}$$

In questo modo conosciamo il valore della corrente in *t*=0:

$$i_{L-}(0^-) = i_L(0^+) = i_L(0) = I_{L0} = 3\mathrm{A} \tag{7.161}$$

che sarà la condizione iniziale dell'evoluzione del sistema per *t*>0.

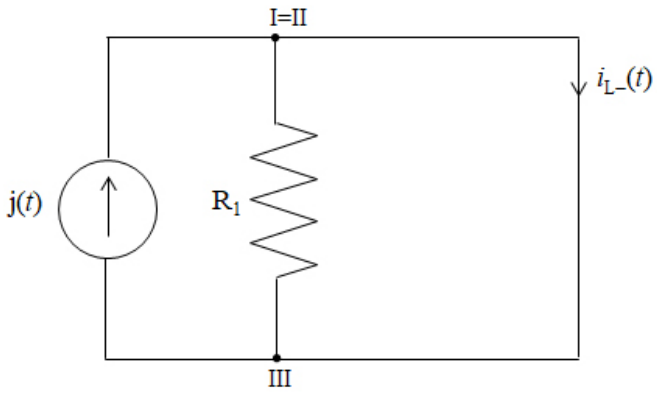


Fig. 7.43 – Circuito della Fig. 7.42 a regime stazionario per $t<t_0$.

Intervallo $t>0$.

In questo caso il circuito è quello di Fig. 7.44 e quindi il problema da risolvere per $t>0$ sarà:

$$\begin{cases} \dfrac{di_L(t)}{dt} + \dfrac{1}{\tau} i_L(t) = \dfrac{1}{\tau} \dfrac{R_1}{R_1+R_2} j(t) = \dfrac{1}{\tau} \\ i_L(0) = I_{L0} = 3A \end{cases} \qquad t>0 \qquad (7.162)$$

con $R_{eq}= R_1+R_2=30\Omega$ (vedi la (7.151)) e $\tau = \dfrac{L}{R_1+R_2} = \dfrac{1}{3}10^{-2}$ s (vedi la (7.152)).

La soluzione particolare la calcoliamo facendo riferimento alla Fig. 7.45. Utilizziamo un partitore di corrente:

$$i_{Lp}(t) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} j(t) = \frac{10}{30} 3 = 1A \qquad (7.163)$$

Il coefficiente k dell'integrale generale si calcola imponendo la condizione iniziale:

$$i_L(0) = k + 1 = I_{L0} = 3 \Rightarrow k = 2A \qquad (7.164)$$

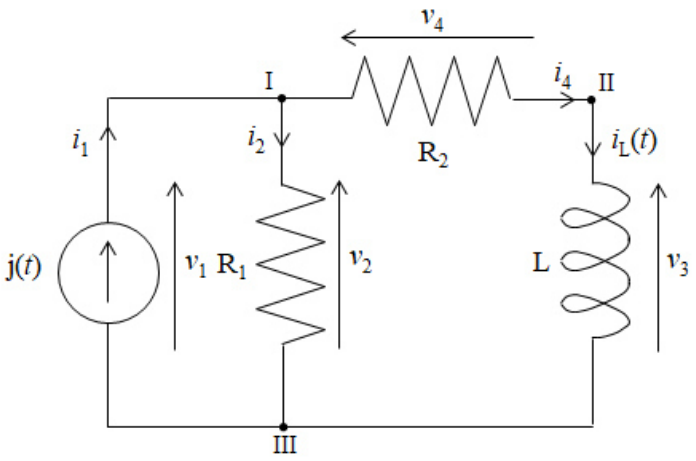


Fig. 7.44 – Circuito di Fig. 7.42 per $t>t_0$.

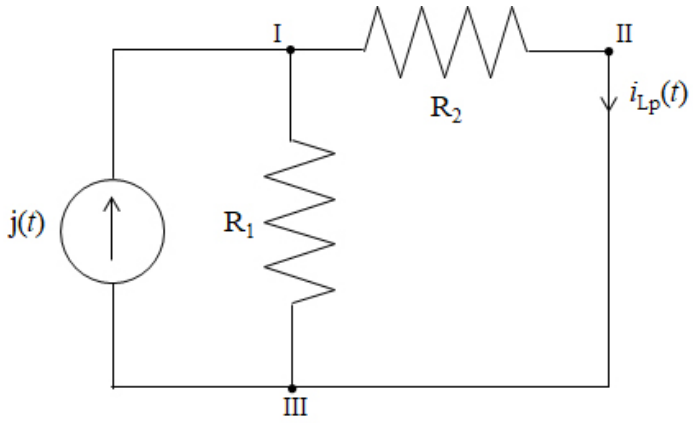


Fig. 7.45 – Circuito di Fig. 7.42 (o Fig. 7.44) per $t \to \infty$.

In conclusione, la soluzione del problema di Cauchy (7.162) sarà:

$$i_L(t) = \left(2 \times e^{-300t} + 1\right) A \qquad t>0 \tag{7.165}$$

Il grafico della (7.165) lo abbiamo mostrato con la curva blu in Fig. 7.46.

Per calcolare le altre grandezze del circuito possiamo utilizzare le altre equazioni del sistema. Qui calcoliamo unicamente la tensione dell'induttore, lasciando per esercizio il calcolo delle altre grandezze. Dalla relazione caratteristica dell'induttore e dalla (7.165) abbiamo:

$$v_3(t) = \mathrm{L}\frac{di_\mathrm{L}(t)}{dt} = -60 \times \mathrm{e}^{-300t}\,\mathrm{V} \qquad t>0 \tag{7.166}$$

che abbiamo rappresentato con una curva rossa nella Fig. 7.46.

😊

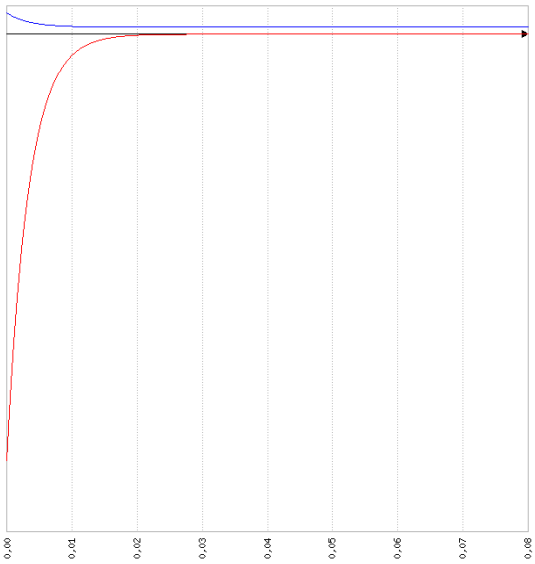


Fig. 7.46 – Grafico della funzione (7.165) in blu e della (7.166) in rosso.

Si osservi che la soluzione trovata è la stessa di quella trovata nel § 3.2.

5.3 I circuiti con interruttore

In questo paragrafo risolveremo due esercizi ottenuti dal sito https://autocircuits.org/autocir_home.html. Si tratta di circuiti del I ordine con interruttori e pertanto si può utilizzare un'analisi per intervalli. Nell'intervallo $t>0$ è possibile calcolare la soluzione richiesta utilizzando il metodo più efficiente[19].

[19] Diciamo che un metodo di soluzione è più efficiente di un altro se comporta un numero inferiori di calcoli.

5.3.1 Esercizio: RC

Consideriamo il circuito di Fig. 7.47[20]. Si vuole calcolare la $v_1(t)$ per $t>0$.

Il generatore di tensione è rappresentato con un simbolo utilizzato spesso in letteratura per indicare i generatori di tensione costanti. Si tratta della ***batteria ideale*** che abbiamo introdotto nella Fig. 2.9 della Lezione 2. L'interruttore presente nel circuito si chiude in $t=0$. Possiamo procedere con un'analisi per intervalli. Supponiamo che per $t<0$ il circuito si trovi a regime.

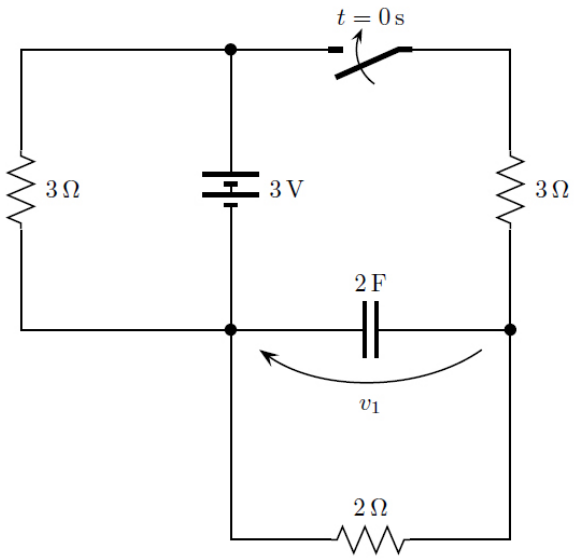


Fig. 7.47 – Circuito RC con interruttore.

Intervallo $t<0$.

L'interruttore è aperto e la resistenza in serie all'interruttore è fluttuante, cioè non vede passaggio di corrente. Il circuito diventa quello di Fig. 7.48. E' facile convincersi che in questo circuito, sebbene esso abbia un grafo connesso, la tensione del generatore riesce ad alimentare unicamente la resistenza della maglia in cui esso è presente. Il condensatore, quindi, non beneficia della potenza erogata dal generatore e, a regime stazionario per $t<0$, si trova ad essere completamente scarico. Pertanto:

[20] I dati sono indicati nella figura.

$$v_{1-}(t) = 0 \qquad t<0 \tag{7.167}$$

dove con $v_{1-}(t)$ abbiamo indicato la tensione del condensatore per $t<0$.

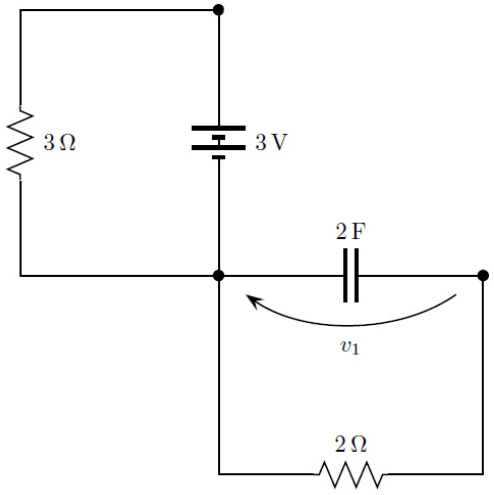


Fig. 7.48 – Circuito di Fig. 7.47 per t<0.

In $t=0$ abbiamo la continuità della variabile di stato:

$$v_{1-}(0^-) = v_1(0^+) = v_1(0) = \mathrm{V}_{10} = 0 \tag{7.168}$$

Intervallo t>0.

Per $t>0$ il circuito di Fig. 7.47 diventa quello di Fig. 7.49.

La soluzione possiamo determinarla partendo dall'integrale generale del problema di Cauchy che sappiamo essere (confronta la (6.28) della lezione 6):

$$v_1(t) = \left(\mathrm{V}_{10} - v_{1\mathrm{p}}(t_0)\right) \mathrm{e}^{-\frac{1}{\tau}(t-t_0)} + v_{1\mathrm{p}}(t) \qquad t>0 \tag{7.169}$$

Con $t_0=0$ e condizioni iniziali V_{10} della (7.168). Nella rimane da determinare la costante di tempo τ e la soluzione particolare $v_{1\mathrm{p}}(t)$.

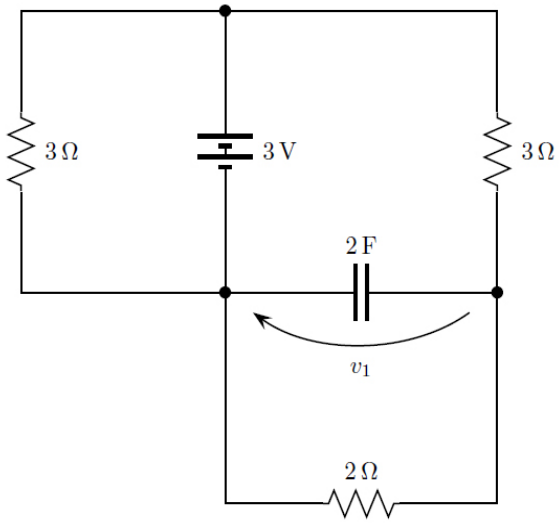


Fig. 7.49 – Circuito di Fig. 7.47 per t>0.

Calcoliamo la costante di tempo. Essendo un circuito RC ci aspettiamo che sia:

$$\tau = R_{eq} C \tag{7.170}$$

con R_{eq} uguale alla resistenza equivalente vista dal condensatore quando il generatore si spegne (confronta la (6.41) della Lezione 6). Per determinare la (7.170) abbiamo quindi bisogno di calcolare la R_{eq}. Dalla Fig. 7.49 vediamo che quando spegniamo la batteria la resistenza in parallelo viene cortocircuitata e quindi il condensatore vede per R_{eq} il parallelo di due resistenze:

$$R_{eq} = \frac{2 \times 3}{2+3} = \frac{6}{5}\Omega \tag{7.171}$$

e quindi dalla (7.170) e (7.171):

$$\tau = \frac{12}{5}\text{s} \tag{7.172}$$

Calcoliamo ora la soluzione particolare. Analizziamo il circuito di Fig. 7.49 a regime stazionario: il condensatore si apre e la tensione ai suoi terminali (aperti) è pari alla tensione sul resistore in parallelo di 2Ω. Possiamo usare un partitore di tensione applicato alla maglia di destra e quindi ottenere:

$$v_{1p}(t) = -\frac{2}{2+3}3 = -\frac{6}{5}\text{V} \tag{7.173}$$

Il segno meno nella (7.173) è dovuto al fatto che la tensione $v_1(t)$ ha segno discorde a quello del generatore quando abbiamo eseguito il partitore di tensione (confronta § 3.1 della Lezione 4). Sostituendo le (7.173) e (7.172) nella , otteniamo:

$$v_1(t) = \left(\frac{6}{5}e^{-\frac{5}{12}t} - \frac{6}{5}\right)\text{V} \qquad t>0 \tag{7.174}$$

Che rappresenta la soluzione cercata! 😊

5.3.2 Esercizio: RL

Consideriamo il circuito di Fig. 7.50[21]. Si vuole calcolare la $i_2(t)$ per $t>0$.

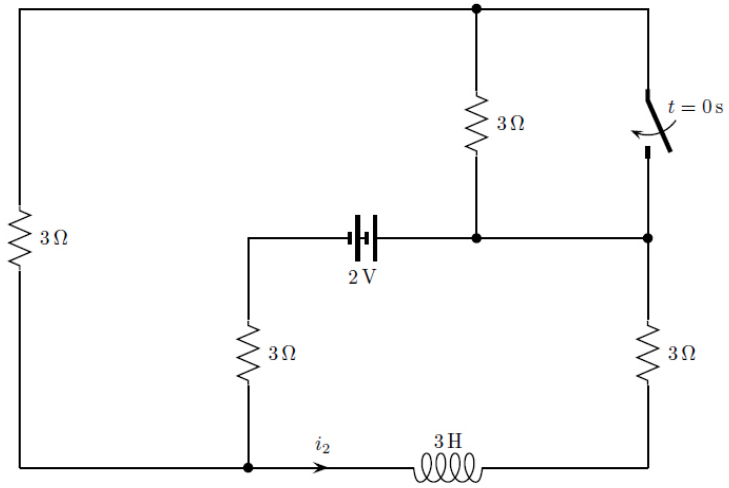


Fig. 7.50 – Circuito RL con interruttore.

Il generatore di tensione è rappresentato con un simbolo utilizzato spesso in letteratura per indicare i generatori di tensione costanti. Si tratta della ***batteria ideale*** che abbiamo introdotto nella Fig. 2.9 della Lezione 2. L'interruttore presente nel circuito si chiude in

[21] I dati sono indicati nella figura.

t=0. Possiamo procedere con un'analisi per intervalli. Supponiamo che per t<0 il circuito si trovi a regime.

Intervallo t<0.

L'interruttore è aperto e il circuito diventa quello di Fig. 7.51. Per calcolare la soluzione di regime è opportuno considerare un c.c. al posto dell'induttore. La corrente $i_2(t)$ sarà quella del resistore in serie all'induttore. Per calcolarla basterà conoscere la tensione su tale resistore. Consideriamo la serie delle due resistenze da 3Ω e il parallelo della resistenza così ottenuta da 6Ω, con quella di 3Ω in modo da ricondurci ad un'unica maglia in cui è presente la batteria. In questa maglia applichiamo il partitore di tensione e otteniamo:

$$v(t) = -\frac{2}{2+3}2 = -\frac{4}{5}\text{V} \qquad t<0 \tag{7.175}$$

che è la tensione del resistore in serie all'induttore come si evince dalla Fig. 7.51. Il segno meno nella (7.175) è dovuto al fatto che la tensione $v(t)$ ha segno discorde a quello della batteria quando abbiamo eseguito il partitore di tensione (confronta § 3.1 della Lezione 4). Per ottenere la corrente dell'induttore basta dividere la (7.175) per la resistenza:

$$i_{2-}(t) = -\frac{4}{5}\times\frac{1}{3} = -\frac{4}{15}\text{A} \qquad t<0 \tag{7.176}$$

dove con $i_{2-}(t)$ abbiamo indicato la corrente dell'induttore per t<0.

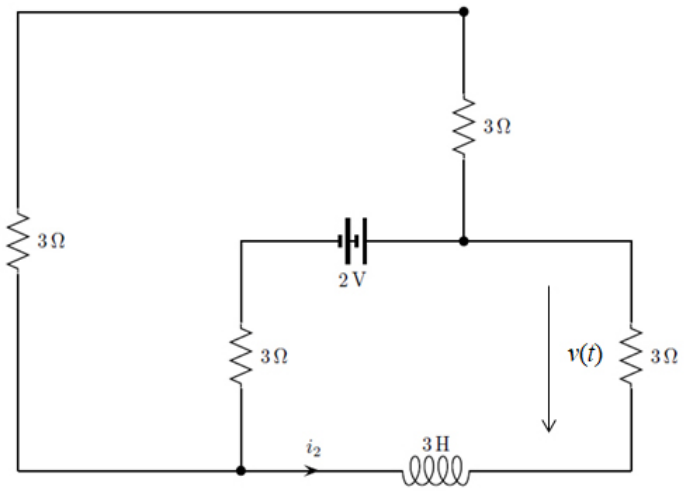


Fig. 7.51 – Circuito di Fig. 7.50 per t<0.

In t=0 abbiamo la continuità della variabile di stato:

$$i_{2-}\left(0^{-}\right)=i_2\left(0^{+}\right)=i_2\left(0\right)=\mathrm{I}_{20}=-\frac{4}{15}\mathrm{A} \tag{7.177}$$

Intervallo t>0.

Per t>0 il circuito di Fig. 7.50 diventa quello di Fig. 7.52.

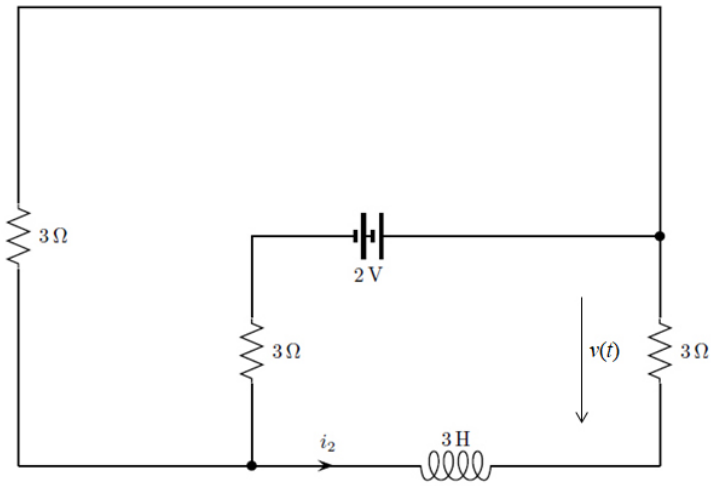


Fig. 7.52 – Circuito di Fig. 7.50 per t>0.

La soluzione possiamo determinarla partendo dall'integrale generale del problema di Cauchy che sappiamo essere (confronta la (6.28) della lezione 6):

$$i_2\left(t\right)=\left(\mathrm{I}_{20}-i_{2\mathrm{p}}\left(t_0\right)\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{\tau}\left(t-t_0\right)}+i_{2\mathrm{p}}\left(t\right)\qquad t>0 \tag{7.178}$$

Con t_0=0 e condizioni iniziali I_{20} della (7.177). Nella (7.178) restano da determinare la costante di tempo τ e la soluzione particolare $i_{2\mathrm{p}}(t)$.

Calcoliamo la costante di tempo. Trattandosi un circuito RL, ci aspettiamo che sia:

$$\tau=\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{R}_{\mathrm{eq}}} \tag{7.179}$$

con R_{eq} uguale alla resistenza equivalente vista dall'induttore quando il generatore si spegne (confronta la (6.41) della Lezione 6). Per determinare la (7.179) abbiamo quindi bisogno di calcolare la R_{eq}. Dalla Fig. 7.52 vediamo che quando spegniamo la batteria abbiamo due resistenze in parallelo e poi in serie alla terza:

$$R_{eq} = \frac{3 \times 3}{3+3} + 3 = \frac{9}{2}\Omega \tag{7.180}$$

e quindi dalla (7.179) e (7.180):

$$\tau = \frac{2}{3}\text{s} \tag{7.181}$$

Calcoliamo ora la soluzione particolare. Analizziamo il circuito di Fig. 7.52 a regime stazionario: l'induttore si comporta come un c.c. e la sua corrente è pari alla corrente sul resistore in serie di 3Ω. Tale corrente la possiamo calcolare dividendo la tensione $v(t)$, indicata nella Fig. 7.52, per la resistenza di valore 3Ω. Per calcolare $v(t)$, possiamo ridurre il circuito ad un'unica maglia considerando il parallelo delle due resistenze. E poi usare un partitore di tensione e quindi ottenere:

$$v(t) = -\frac{3/2}{3/2+3}2 = -\frac{2}{3}\text{V} \tag{7.182}$$

Il segno meno nella (7.182) è dovuto al fatto che la tensione $v(t)$ ha segno discorde a quello della batteria quando abbiamo eseguito il partitore di tensione (confronta § 3.1 della Lezione 4). La corrente dell'induttore $i_{2p}(t)$ la otteniamo dividendo la (7.182) per la resistenza di 3Ω:

$$i_{2p}(t) = -\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = -\frac{2}{9}\text{A} \qquad t>0 \tag{7.183}$$

Sostituendo le (7.183) e (7.181) nella (7.179) otteniamo:

$$i_2(t) = \left(-\frac{2}{45} e^{-\frac{3}{2}t} - \frac{2}{9} \right)\text{A} \qquad t>0 \tag{7.184}$$

Che rappresenta la soluzione cercata! 😊

6 I circuiti risolti con il principio di sovrapposizione degli effetti

Sino ad ora abbiamo considerato sempre circuiti dinamici alimentati da un unico generatore. In questo paragrafo vogliamo risolvere esercizi che riguardano circuiti dinamici del I ordine con due generatori. Useremo il ***principio di sovrapposizione degli effetti*** (PSE). Faremo riferimento al § 3.7 della Lezione 6 per un inquadramento teorico.

6.1 Circuito RC con due generatori

Consideriamo il circuito di Fig. 7.53 che ha la caratteristica di avere due generatori. Vogliamo studiare tale circuito per $t>t_0$. Il sistema di equazioni circuitali del circuito risulta per $t>t_0$:

$$\begin{cases} i_1(t)-i_2(t)=0 \\ i_2(t)-i_3(t)-i_4(t)-i_5(t)=0 \\ v_1(t)-v_2(t)-v_C(t)=0 \\ v_C(t)-v_4(t)=0 \\ v_4(t)=v_5(t) \\ v_1(t)=e(t) \\ i_5(t)=-j(t) \\ v_2(t)=R_1 i_2(t) \\ v_4(t)=R_2 i_4(t) \\ i_3(t)=C\dfrac{dv_C(t)}{dt} \end{cases} \tag{7.185}$$

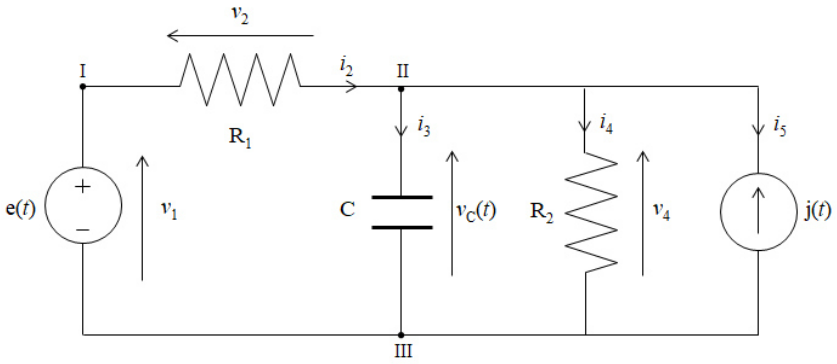


Fig. 7.53 – Circuito RC con due generatori.

Al fine di ottenere un'unica equazione differenziale (l'equazione di stato) nella variabile di stato, nel sistema (7.185) sostituiamo le relazioni caratteristiche nelle leggi di Kirchhoff:

$$\begin{cases} i_1(t) - i_2(t) = 0 \\ i_2(t) - \mathrm{C}\dfrac{dv_\mathrm{C}(t)}{dt} - i_4 + \mathrm{j}(t) = 0 \\ \mathrm{e}(t) - \mathrm{R}_1 i_2(t) - v_\mathrm{C}(t) = 0 \\ v_\mathrm{C}(t) - \mathrm{R}_2 i_4(t) = 0 \\ \mathrm{R}_2 i_4(t) = v_5(t) \end{cases} \qquad (7.186)$$

Cerchiamo l'equazione differenziale in $v_\mathrm{C}(t)$, allora eliminiamo dal sistema (7.186) le incognite $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_4(t)$ e $v_5(t)$ e otteniamo:

$$\frac{dv_\mathrm{C}(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} v_\mathrm{C}(t) = \frac{1}{\mathrm{R}_1\mathrm{C}}\mathrm{e}(t) + \frac{1}{\mathrm{C}}\mathrm{j}(t) \qquad t>t_0 \qquad (7.187)$$

dove la costante di tempo $\tau = \mathrm{R}_{eq}\mathrm{C}$ e dove:

$$\mathrm{R}_{eq} = \frac{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2}{\mathrm{R}_1+\mathrm{R}_2} \qquad (7.188)$$

è la resistenza equivalente.

Risolviamo il circuito con i seguenti dati:

DATI*:* t_0=0, R_1=3Ω, R_2=2Ω, C=2 F, e(t)=10V, j(t)=3u(–t) + 6u(t). Il circuito è a regime per t<0. La funzione gradino unitario $u(t)$ l'abbiamo definita nella (6.88) della Lezione 6.

L'esercizio da risolvere ha il generatore e(t) che è costante sempre, e il generatore j(t) che in t=0 cambia valore accendendo una dinamica transitoria che conduce ad un nuovo regime per t–>∞. Il regime raggiunto è stazionario in quanto, oltre al generatore e(t) costante, abbiamo il generatore j(t) anch'esso costante per t>0.

Riassumendo, abbiamo che il circuito di Fig. 7.53 con i dati proposti funziona:

- per t<0 con due generatori costanti: e(t)=10V, j(t)=3A,
- per t>0 con due generatori costanti: e(t)=10V, j(t)=6A.

Confrontando la (6.93) della Lezione 6 e la (7.187), volendo calcolare la $v_C(t)$ per $t>0$, abbiamo bisogno di risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{dv_C(t)}{dt} + \dfrac{1}{\tau} v_C(t) = G_e(t) + G_j(t) & t>0 \\ v_C(0) = V_{C0} \end{cases} \qquad (7.189)$$

con $G_e(t) = \dfrac{1}{R_1 C} e(t)$ e $G_j(t) = \dfrac{1}{C} j(t)$ e V_{C0} da determinare studiando il circuito per $t<0$.

Ricordandoci della (6.94) della Lezione 6, l'integrale generale della (7.189) sarà:

$$v_C(k,t) = k e^{-\frac{1}{\tau}(t-t_0)} + v_{Cpe}(t) + v_{Cpj}(t) \qquad t>0 \qquad (7.190)$$

La costante k può essere determinata utilizzando le condizioni iniziali in $t=0$, che dobbiamo calcolare studiando il circuito per $t<0$, e la conoscenza delle soluzioni particolari $v_{Cpe}(t)$ e $v_{Cpj}(t)$ per $t > 0$. Abbiamo bisogno, dunque, di un'analisi per intervalli e possiamo procedere in due modi:

1) utilizzando il PSE e trovando le due soluzioni di regime per $t<0$ e poi le due soluzioni particolari per $t>0$ (vedi Fig. 7.54).
2) considerando un circuito equivalente (sceglieremo quello secondo Norton) al circuito di partenza e quindi risolvendo un esercizio con un solo generatore

Nei prossimi due paragrafi mostreremo come utilizzare i due procedimenti.

6.1.1 La soluzione con la sovrapposizione degli effetti

In riferimento alla Fig. 7.54, che rappresenta lo schema risolutivo utilizzato in questo paragrafo

- determiniamo le soluzioni di regime per $t<0$: $v_{Ce-}(t)$, che è la risposta del sistema al generatore $e(t)$, e $v_{Cj-}(t)$, che è la risposta del sistema al generatore $j(t)$. Sommiamo le due funzioni per ottenere la soluzione $v_{C-}(t)$ per $t<0$.
- In seguito, risolviamo il problema di Cauchy per $t>0$, avendo la condizione iniziale $V_{C0}= v_{C-}(0)$ e utilizzando il PSE.

Facciamolo!

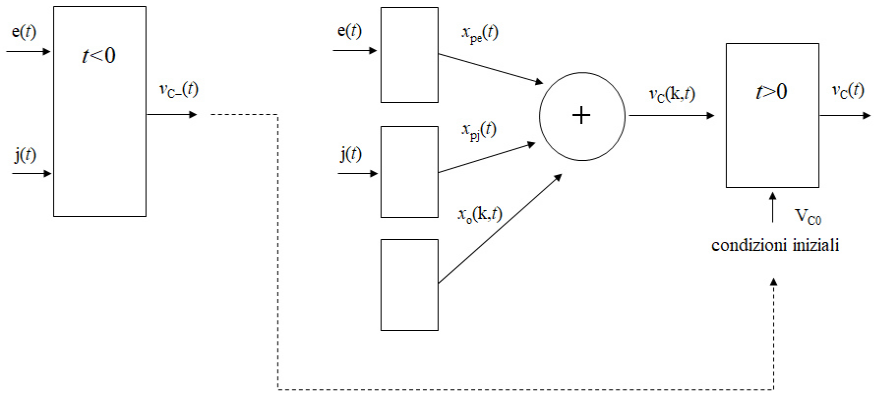


Fig. 7.54 – Schema risolutivo con PSE.

Intervallo t<0

Per *t*<0 i due generatori sono entrambi accesi e possiamo utilizzare il PSE e quindi considerare i circuiti "ausiliari" di Fig. 7.55 e Fig. 7.56.

Con il circuito di Fig. 7.55 calcoliamo la $v_{Ce-}(t)$ con un partitore di tensione:

$$v_{Ce-}(t)=\frac{R_2}{R_1+R_2}e(t)=4V \qquad (7.191)$$

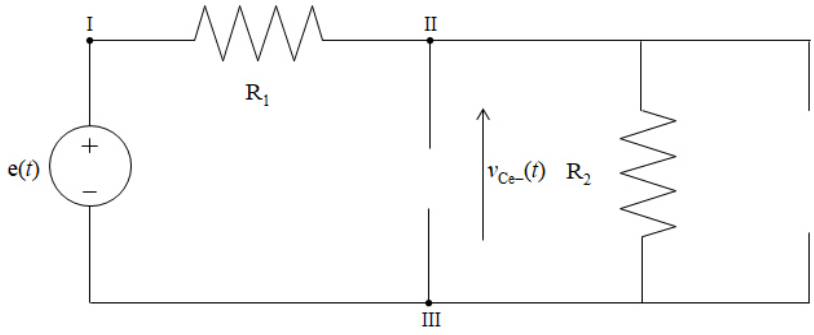


Fig. 7.55 – Circuito ausiliare del circuito di Fig. 7.53 a regime con il generatore di corrente spento per t<0.

Con il circuito di Fig. 7.56 calcoliamo la corrente nel resistore R_1: $i_-(t)$ con un partitore di corrente:

$$i_{-}(t)=\frac{R_2}{R_1+R_2}\,j(t)=\frac{6}{5}A \tag{7.192}$$

E poi dalla relazione caratteristica del resistore R_1:

$$v_{Cj-}(t)=R_1 i_{-}(t)=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}\,j(t)=\frac{6}{5}3=\frac{18}{5}V \tag{7.193}$$

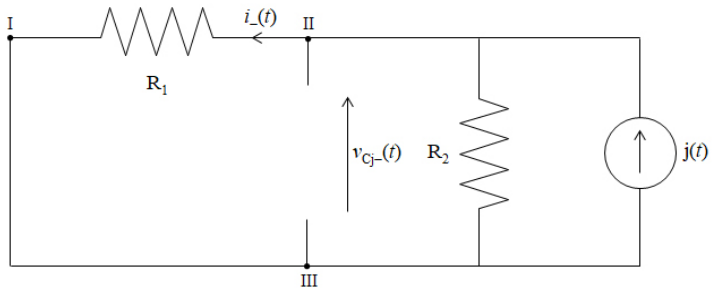


Fig. 7.56 – Circuito ausiliare del circuito di Fig. 7.53 a regime con il generatore di tensione spento per t<0.

La $v_{C-}(t)$ la troviamo come somma delle(7.191) e (7.193):

$$v_{C-}(t)=v_{Ce-}(t)+v_{Cj-}(t)=4+\frac{18}{5}=\frac{38}{5}V \tag{7.194}$$

In t=0 abbiamo la continuità della variabile di stato:

$$v_{C-}(0^-)=v_C(0^+)=v_C(0)=V_{C0}=\frac{38}{5}V \tag{7.195}$$

Intervallo t>0.

Riscriviamo la (7.190):

$$v_C(k,t)=ke^{-\frac{5}{12}t}+v_{Cpe}(t)+v_{Cpj}(t) \qquad t>0 \tag{7.196}$$

con:

$$\tau=R_{eq}C=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}C=\frac{12}{5}s \tag{7.197}$$

Per determinare la costante k dalla (7.196) abbiamo bisogno di conoscere le soluzioni particolari $v_{Cpe}(t)$ e $v_{Cpj}(t)$.

Con il circuito di Fig. 7.57 calcoliamo la $v_{Cpe}(t)$ con un partitore di tensione così come abbiamo fatto per la (7.191):

$$v_{Cpe}(t)=\frac{R_2}{R_1+R_2}e(t)=4V \tag{7.198}$$

Osserviamo che il valore della (7.198) è uguale alla (7.191) poiché il generatore di tensione e(t) rimane costante sia per t<0 che per t>0 e quindi $v_{Cpe}(t)=v_{Ce-}(t)$.

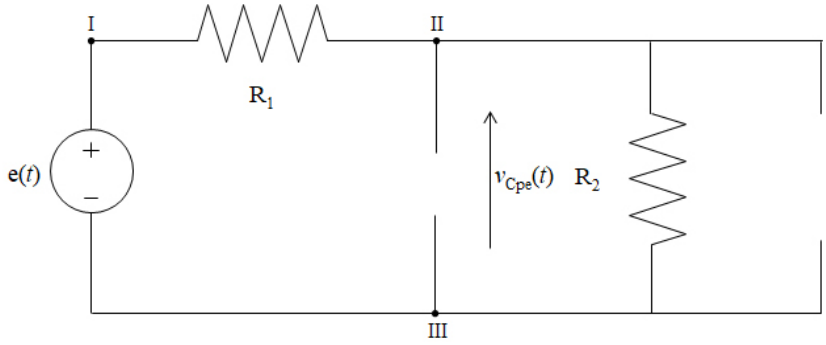


Fig. 7.57 – Circuito ausiliare del circuito di Fig. 7.53 a regime con generatore di corrente spento per t->∞.

Con il circuito di Fig. 7.58 calcoliamo $v_{Cpj}(t)$. Ragionando come per la (7.193) possiamo scrivere:

$$v_{Cpj}(t)=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}j(t)=\frac{6}{5}6=\frac{36}{5}V \tag{7.199}$$

Ora sommiamo le due soluzioni particolari (7.198) e (7.199) utilizzando il PSE:

$$v_{Cp}(t)=v_{Cpe}(t)+v_{Cpj}(t)=4+\frac{36}{5}=\frac{56}{5}V \tag{7.200}$$

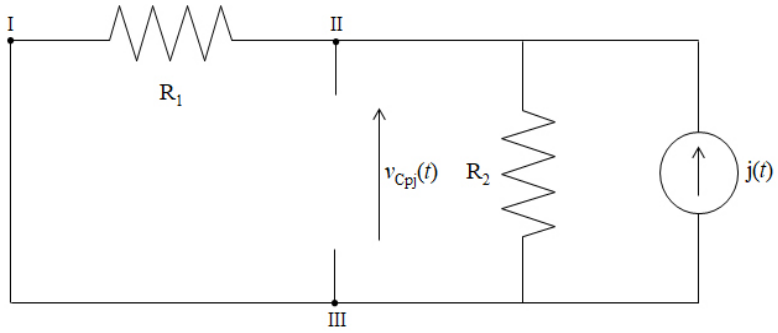


Fig. 7.58 – Circuito ausiliare del circuito di Fig. 7.53 a regime con generatore di tensione spento per t->∞.

Siamo pronti per determinare il k della (7.196) imponendo la condizione iniziale (7.195):

$$v_C(0) = k + v_{Cp}(0) = V_{C0} = \frac{38}{5}V \Rightarrow k = -\frac{18}{5} \qquad (7.201)$$

E quindi la soluzione cercata sarà:

$$v_C(t) = \left(-\frac{18}{5} \times e^{-\frac{5}{12}t} + \frac{56}{5}\right)V \qquad t>0 \qquad (7.202)$$

☺

6.1.2 La soluzione con generatore equivalente

Risolviamo l'esercizio precedente utilizzando il teorema del generatore equivalente per semplificare il circuito di Fig. 7.53. Vogliamo ricondurre il circuito di Fig. 7.53 a quello equivalente secondo Norton di Fig. 7.59.

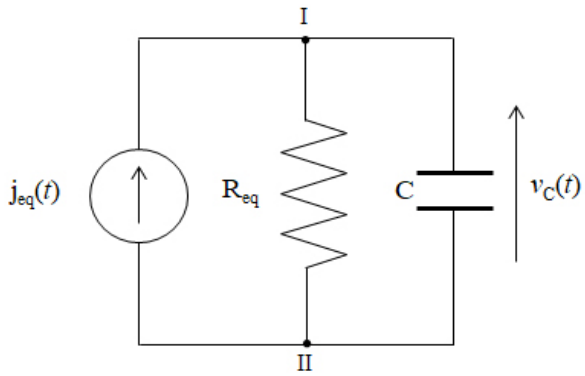


Fig. 7.59 – Circuito secondo Norton equivalente a quello di Fig. 7.53.

Il circuito di Fig. 7.59 ha la R_{eq} calcolata rendendo passivo il circuito di Fig. 7.53, come abbiamo mostrato in Fig. 7.60. Rispetto al condensatore, le due resistenze sono in parallelo e quindi (vedi la (7.188)):

$$R_{eq}=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}=\frac{6}{5}\Omega \tag{7.203}$$

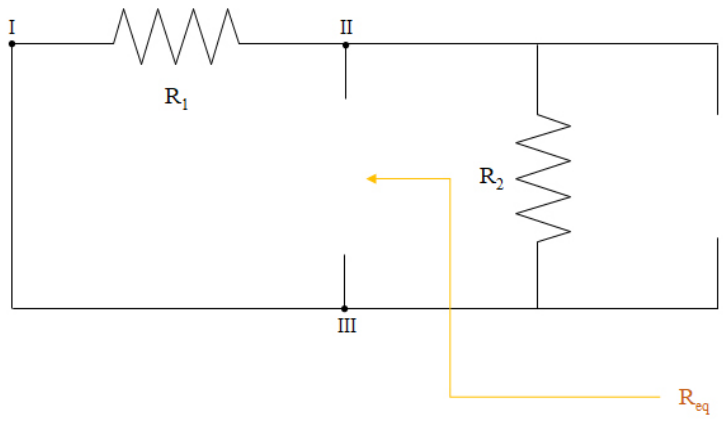


Fig. 7.60 – Circuito Fig. 7.53 reso passivo per il calcolo della R_{eq}.

Per trovare la $j_{eq}(t)$ della Fig. 7.59, calcoliamo la corrente di c.c. della Fig. 7.61. Questa è facile ottenerla considerando che il c.c. mette fuori gioco la resistenza R_2 e pertanto si ha (per t<0 e t>0 cambia solo il valore di corrente erogato da j(t)):

$$j_{eq}(t)=j(t)+i(t)=j(t)+\frac{v(t)}{R_1}=j(t)+\frac{e(t)}{R_1}=\frac{19}{3}\text{A} \qquad t<0 \tag{7.204}$$

$$j_{eq}(t)=j(t)+i(t)=j(t)+\frac{v(t)}{R_1}=j(t)+\frac{e(t)}{R_1}=\frac{28}{3}\text{A} \qquad t>0 \tag{7.205}$$

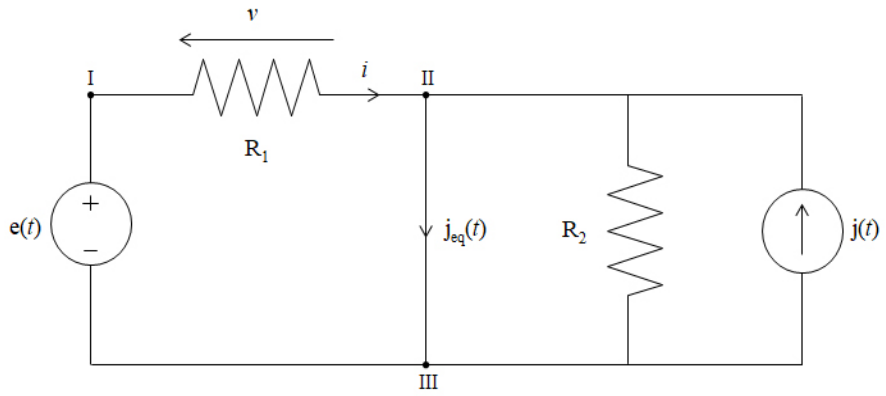


Fig. 7.61 – Calcolo della corrente di corto circuito tra i terminali del condensatore di Fig. 7.53.

Il circuito di Fig. 7.59 lo abbiamo risolto nel § 1.2. In questo caso dobbiamo fare un'analisi per intervalli.

Intervallo t<0.

Il circuito è a regime, il generatore di corrente vale come nella (7.204), il condensatore è un circuito aperto e la sua tensione è:

$$v_{C-}(t) = R_{eq}\, j_{eq}(t) = \frac{38}{5}\,V \qquad t<0 \tag{7.206}$$

Osserviamo che la (7.206) è uguale alla (7.194) come c'era da aspettarsi!

Abbiamo la condizione iniziale in t=0 come la (7.195):

$$v_{C-}(0^-) = v_C(0^+) = v_C(0) = V_{C0} = \frac{38}{5}\,V \tag{7.207}$$

Intervallo t>0.

Infine, per calcolare la tensione $v_C(t)$ per t>0 cercata, possiamo ora utilizzare la (7.40) dove ci serve la soluzione particolare. Questa la calcoliamo come abbiamo fatto nell'intervallo t<0, utilizzando il valore (7.205) per il generatore $j_{eq}(t)$. Abbiamo:

$$v_{Cp}(t) = R_{eq}\, j_{eq}(t) = \frac{56}{5}\,V \tag{7.208}$$

per t>0.

Essendo τ=12/5s dalla (7.197), V_{C0}=38/5 dalla (7.207), $v_{Cp}(t)$=56/5 dalla (7.208), si ha:

$$v_C(t) = \left(V_{C0} - v_{Cp}(0)\right)e^{-\frac{t}{\tau}} + v_{Cp}(t) = \left(-\frac{18}{5}e^{-\frac{5}{12}t} + \frac{56}{5}\right)V \qquad t>0 \qquad (7.209)$$

Che è la soluzione cercata (uguale alla (7.202))!

☺

7 I circuiti dinamici alimentati da generatori sinusoidali*

Ma che accade quando al posto di generatori costanti abbiamo generatori di tipo sinusoidale? I procedimenti che abbiamo imparato per il caso stazionario si estendono al caso sinusoidale tranne che nella determinazione della soluzione particolare per la quale bisogna agire con funzioni sinusoidali piuttosto che costanti. Questo comporta l'utilizzo di un metodo, chiamato metodo simbolico, che introdurremo nella prossima Lezione 8.

7.1 Esempio

Consideriamo il circuito RC di Fig. 7.27. In questo esempio supponiamo di avere i seguenti dati:

DATI: t_0=0, V_{C0}=0, R_1=1Ω, R_2=1Ω, C=2F, e(t)=2sin(2t+75°)u(t)V. La funzione gradino unitario $u(t)$ l'abbiamo definita nella (6.88) della Lezione 6.

Il problema di Cauchy può essere così formulato:

$$\begin{cases} \dfrac{dv_C(t)}{dt}+\dfrac{1}{\tau}v_C(t)=\dfrac{1}{\tau}\dfrac{R_2}{R_1+R_2}e(t) & t>0 \\ v_C(t)\big|_{t=0}=0 \end{cases} \tag{7.210}$$

dove abbiamo la costante di tempo:

$$\tau=R_{eq}C=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}C=1s \tag{7.211}$$

La soluzione del problema di Cauchy (7.210), ricordandoci della (7.102)(7.14) sarà:

$$v_C(t)=v_{Cp}(0)e^{-t}+v_{Cp}(t) \qquad t>0 \tag{7.212}$$

La funzione del generatore è una sinusoide e pertanto la soluzione particolare, dovendo essere ad essa isomorfa, dovrà essere anch'essa sinusoidale. Dopo aver studiato la Lezione 8 sarà facile calcolare la soluzione particolare $v_{Cp}(t)$:

$$v_{Cp}(t)=0.671\times\cos\left(2t-78^\circ\right)V \qquad t>0 \tag{7.213}$$

che in t=0 vale:

$$v_{\mathrm{Cp}}(0) = 0.14\mathrm{V} \tag{7.214}$$

e quindi la soluzione cercata sarà:

$$v_{\mathrm{C}}(t) = \left(-0.14 \times \mathrm{e}^{-t} + 0.671 \times \cos\left(2t - 78^{\circ}\right)\right)\mathrm{V} \qquad t>0 \tag{7.215}$$

di cui abbiamo rappresentato il grafico in Fig. 7.62.

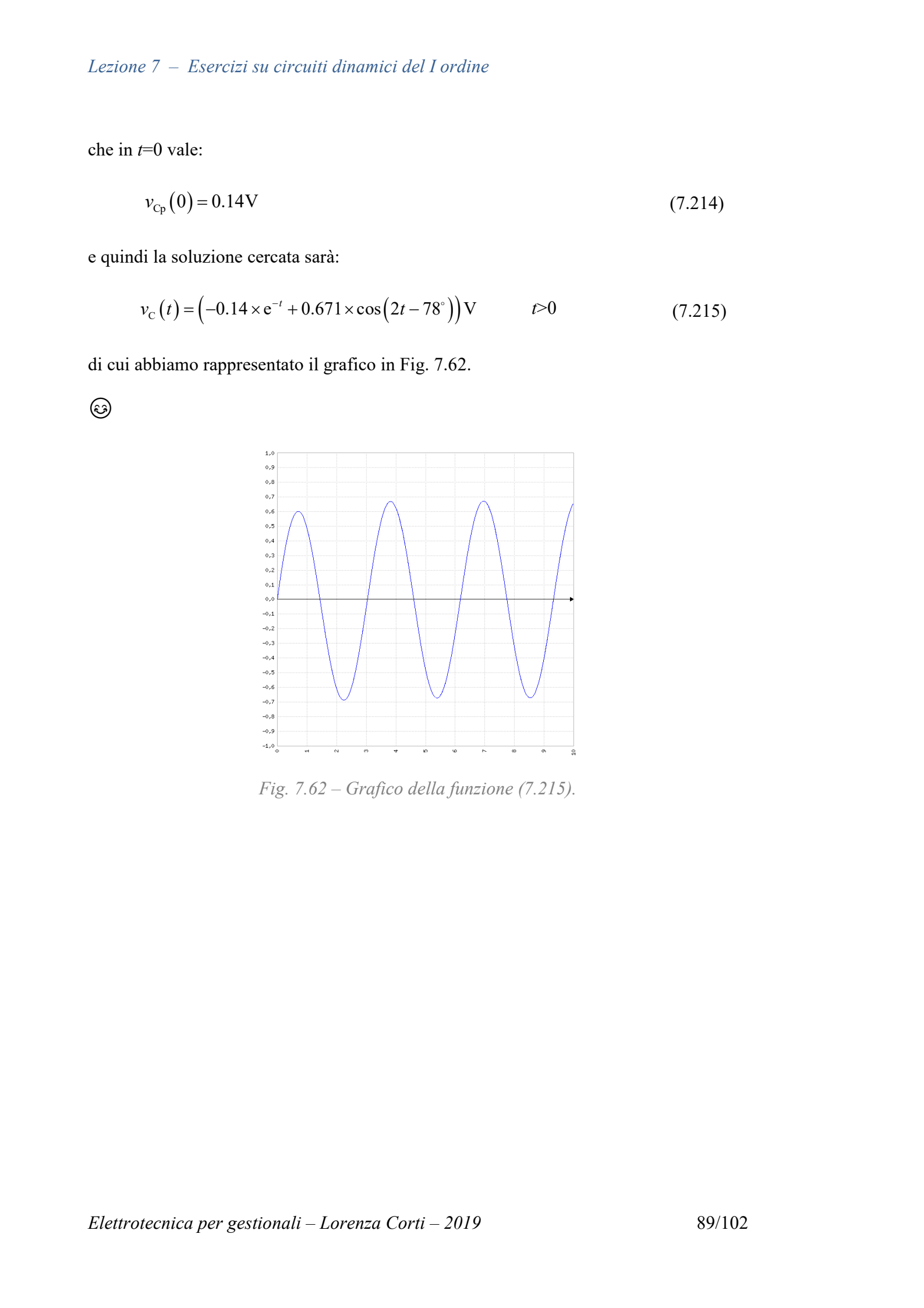


Fig. 7.62 – Grafico della funzione (7.215).

Indice delle Figure

Fig. 7.1 – Circuito RC serie. 4

Fig. 7.2 – Circuito di Fig. 7.1 in regime stazionario. 8

Fig. 7.3 – Grafico della funzione (7.14) in blu e (7.15) in rosso. 10

Fig. 7.4 – Grafico della funzione (7.19) in blu e (7.20) in rosso. 12

Fig. 7.5 – Grafico della funzione (7.25) – evoluzione libera di un circuito RC. 13

Fig. 7.6 – Grafico della funzione (7.29). 15

Fig. 7.7 – Grafico della tensione erogata dal generatore di tensione dell'RC serie. 16

Fig. 7.8 – Grafico della funzione (7.30) in verde e (7.35) in blu. 18

Fig. 7.9 – Circuito RC parallelo. 18

Fig. 7.10 – Circuito di Fig. 7.9 in regime stazionario. 21

Fig. 7.11 – Grafico della funzione $v_C(t)$ in blu e $i_3(t)$ in rosso. 22

Fig. 7.12 – Circuito RL parallelo. 23

Fig. 7.13 – Circuito di Fig. 7.12 in regime stazionario. 26

Fig. 7.14 – Grafico della funzione (7.62) in blu e (7.63) in rosso. 28

Fig. 7.15 – Grafico della funzione (7.67) in blu e (7.68) in rosso. 30

Fig. 7.16 – Grafico della corrente erogata dal generatore di corrente dell'RL parallelo. 31

Fig. 7.17 – Grafico della funzione (7.70) in verde e (7.75) in blu. 32

Fig. 7.18 – Circuito RL serie. 33

Fig. 7.19 – Circuito di Fig. 7.18 in regime stazionario. 35

Fig. 7.20 – Grafico della funzione $i_L(t)$ in blu e $v_3(t)$ in rosso. 37

Fig. 7.21 – Circuito RC con generatore di corrente in serie. 38

Fig. 7.22 – Circuito RL con generatore di tensione in parallelo. 39

Fig. 7.23 – Circuito capacitivo ideale privo di resistenza con generatore di corrente. 40

Fig. 7.24 – Circuito induttivo ideale privo di resistenza con generatore di tensione. 40

Fig. 7.25 – Circuito capacitivo mal posto. 42

Fig. 7.26 – Circuito induttivo mal posto. 42

Fig. 7.27 – Esempio di circuito RC con due resistenze. 44

Fig. 7.28 – Circuito della Fig. 7.27 a regime stazionario. 46

Fig. 7.29 – Grafico della funzione (7.111) in blu e (7.112) in rosso. 48

Fig. 7.30 – Esempio di circuito RL con due resistenze. 49

Fig. 7.31 – Circuito della Fig. 7.30 a regime stazionario. 52

Fig. 7.32 – Grafico della funzione (7.130) in blu e (7.131) in rosso. 53

Fig. 7.33 – Esempio di circuito RC con tre resistenze. 54

Fig. 7.34 – Circuito di Fig. 7.33 a regime stazionario. 57

Fig. 7.35 – Grafico della funzione (7.146) in blu e (7.147) in rosso. 58

Fig. 7.36 – Circuiti del I ordine: (a) RC, (b) RL. 59

Fig. 7.37 – Possibili circuiti equivalenti: (a) e (c) del circuito (a) di Fig. 7.36; (b) e (d) del circuito (b) di Fig. 7.36. 60

Fig. 7.38 – Circuito di Fig. 7.33 reso passivo per il calcolo della R_{eq}. 61

Fig. 7.39 – Circuito di Fig. 7.33 in cui è possibile calcolare la tensione a vuoto $V_0(t)$. . 62

Fig. 7.40 – Circuito equivalente, secondo Thevenin, al circuito di Fig. 7.33. 62

Fig. 7.41 – Grafico della funzione (7.158) in blu e (7.159) in rosso. 66

Fig. 7.42 – Circuito RL con due resistenze e interruttore. 67

Fig. 7.43 – Circuito della Fig. 7.42 a regime stazionario per $t<t_0$. 68

Fig. 7.44 – Circuito di Fig. 7.42 per $t>t_0$. 69

Fig. 7.45 – Circuito di Fig. 7.42 (o Fig. 7.44) per $t \to \infty$. 69

Fig. 7.46 – Grafico della funzione (7.165) in blu e della (7.166) in rosso. 70

Fig. 7.47 – Circuito RC con interruttore. 71

Fig. 7.48 – Circuito di Fig. 7.47 per t<0. 72

Fig. 7.49 – Circuito di Fig. 7.47 per t>0. 73

Fig. 7.50 – Circuito RL con interruttore. 74

Fig. 7.51 – Circuito di Fig. 7.50 per t<0. 75

Fig. 7.52 – Circuito di Fig. 7.50 per t>0. 76

Fig. 7.53 – Circuito RC con due generatori. 78

Fig. 7.54 – Schema risolutivo con PSE. 81

Fig. 7.55 – Circuito ausiliare del circuito di Fig. 7.53 a regime con il generatore di corrente spento per t<0. 81

Fig. 7.56 – Circuito ausiliare del circuito di Fig. 7.53 a regime con il generatore di tensione spento per t<0. 82

Fig. 7.57 – Circuito ausiliare del circuito di Fig. 7.53 a regime con generatore di corrente spento per t->∞. 83

Fig. 7.58 – Circuito ausiliare del circuito di Fig. 7.53 a regime con generatore di tensione spento per t->∞. 84

Fig. 7.59 – Circuito secondo Norton equivalente a quello di Fig. 7.53. 84

Fig. 7.60 – Circuito Fig. 7.53 reso passivo per il calcolo della R_{eq}. 85

Fig. 7.61 – Calcolo della corrente di corto circuito tra i terminali del condensatore di Fig. 7.53. 86

Fig. 7.62 – Grafico della funzione (7.215). 89

Domande

Esercizi

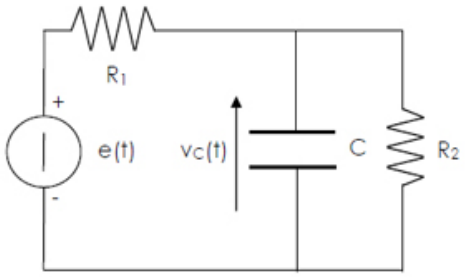
Quando indicato dalla presenza del simbolo @ si tratta di esercizi risolti presi dal sito:

https://autocircuits.org/autocir_home.html. È possibile generare altri esercizi risolti utilizzando il sito che prevede varie categorie di esercizi. Quando trovate il simbolo @, vuol dire che è possibile utilizzare il sito per la tipologia di esercizi che si stanno risolvendo.

7.1. Quanto vale la condizione iniziale, per t=0, della tensione $v_C(t)$ del circuito di figura:

($e(t)=Eu(-t)+2Eu(t)$; E=2V; R_1=10 Ω; R_2=20 Ω; C=0.01mF; $u(t)$ funzione gradino unitario)

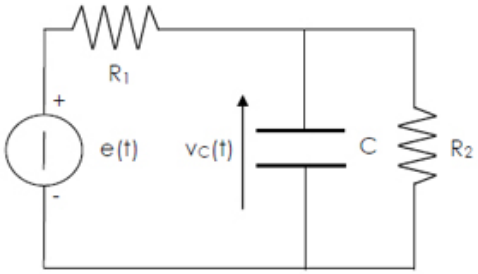
$$v_C(0)=\frac{4}{3}\text{V}$$



7.2. Quale è il termine transitorio $v_{C0}(t)$ della variabile di stato $v_C(t)$ nel circuito di figura:

($e(t)=Eu(-t)-2Eu(t)$; E=2V; R_1=10 Ω; R_2=20 Ω; C=3mF; $u(t)$ funzione gradino unitario)

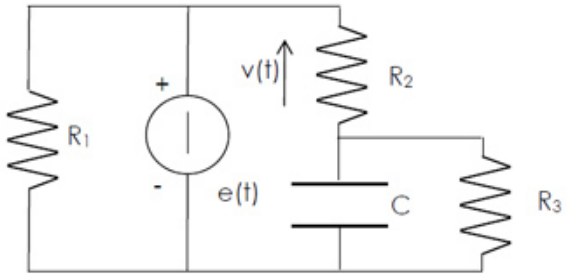
$$v_{C0}(t)=4\times e^{-\frac{t}{0,02}}\text{V}$$



7.3. Quanto vale a regime la tensione $v(t)$ presente nel circuito di figura?

(e(t)=Eu(t); E=2 V; R_1=10 Ω; R_2=5 Ω; R_3=3 Ω; C=0.01mF; $u(t)$ funzione gradino unitario)

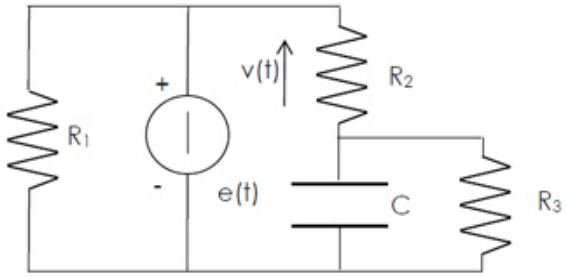
$$v_p(t) = \frac{5}{4}\text{V}$$



7.4. Quanto vale la costante di tempo τ del circuito di figura?

(e(t)=Eu(t); E=2 V; R_1=10 Ω; R_2=5 Ω; R_3=3 Ω; C=0.08mF; $u(t)$ funzione gradino unitario)

$$\tau = 0.15 \times 10^{-3}\text{s}$$

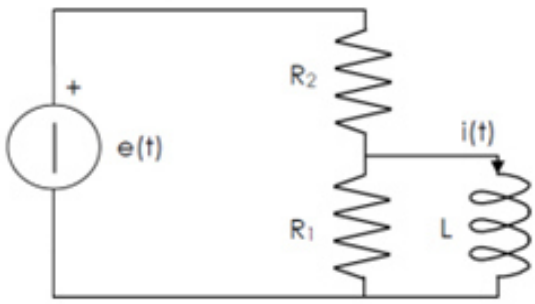


7.5. Quanto vale la soluzione di regime $i_p(t)$ del circuito di figura? Quanto vale la costante di tempo τ del circuito di figura:

(e(t)=Eu(–t) +3Eu(t); E=3V; R_1=10 Ω; R_2=20 Ω; L=1mH; u(t) funzione gradino unitario)

$i_p(t)$ = 0.45 A

τ = 0.15 ms

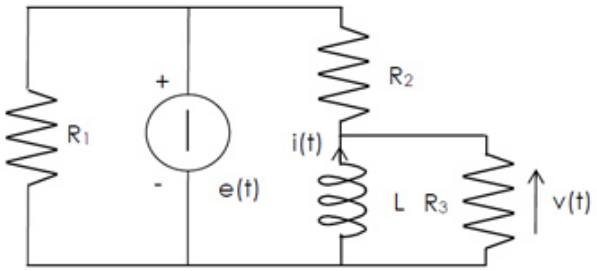


7.6. Quanto vale la costante di tempo τ del circuito di figura? Quanto vale, per t>0, la tensione v(t) presente nel circuito di figura se la condizione iniziale è i(0)=3A?

(e(t)=E=10 V; R_1=10 Ω; R_2=5 Ω; R_3=5 Ω, L=0.1mH)

$\tau = 0.4 \times 10^{-4}\text{s}$

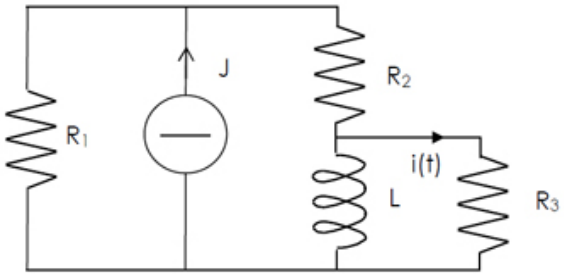
$v(t) = -12.5 \times \text{e}^{-\frac{t}{\tau}}\text{V}$



7.7. Quanto vale a regime la corrente $i_p(t)$ presente nel circuito di figura?

(j(t)=Ju(t); J=20A; R_1=10Ω; R_2=10Ω; R_3=20Ω; L=0.1mH; u(t) funzione gradino unitario)

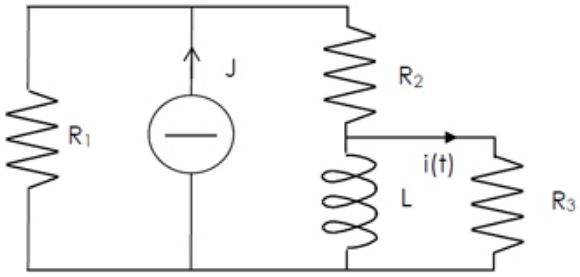
$i_p(t)$ = 0 A



7.8. Quanto vale la costante di tempo τ del circuito di figura?

(j(t)=20A; R_1=12 Ω; R_2=12 Ω; R_3=12 Ω; L=16 mH)

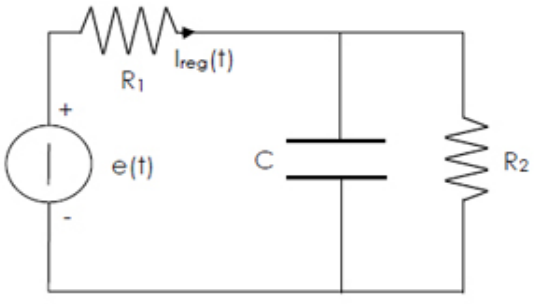
$\tau = 2 \times 10^{-3}$s



7.9. Quanto vale la soluzione di regime $I_{eg}(t)$ per t>0 del circuito di figura?

(e(t) =E+3Eu(t); E=1V; R_1=4Ω; R_2=4Ω; C=1mF; u(t) funzione gradino unitario)

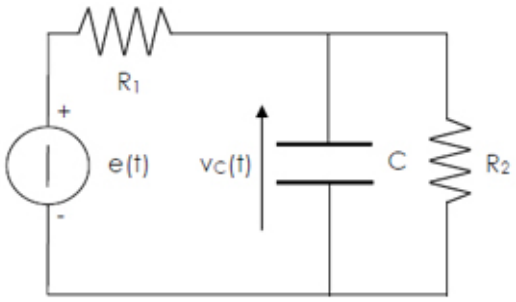
$I_{reg}(t) = 0.5\text{A}$



7.10. Quale è il termine transitorio $v_{C0}(t)$ della variabile di stato $v_C(t)$ nel seguente circuito di figura?

(e(t) = E+4Eu(t); E=2V; R_1=10 Ω; R_2=10 Ω; C=0.1mF; u(t) funzione gradino unitario)

$$v_{C0}(t) = -4 \times e^{-\frac{t}{0{,}0005}} V$$

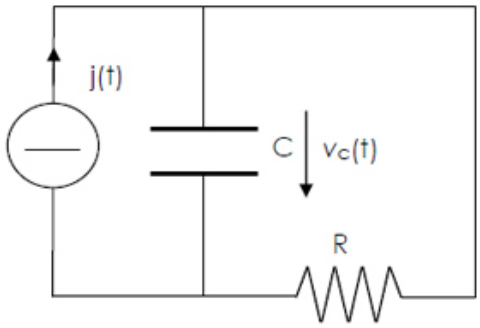


7.11. Per t=2τ quanto vale la tensione $v_C(t)$ del condensatore C presente nel circuito di figura (τ costante di tempo del circuito, u(t) funzione gradino unitario)? E quanto vale per t–>∞?

(J(t) =Ju(t); J=2A; R=10 Ω; C=0.01mF; v_C (0) = 0)

$v_C(2\tau)$ = 17.3V

$v_C(t)$ = 20V t–>∞

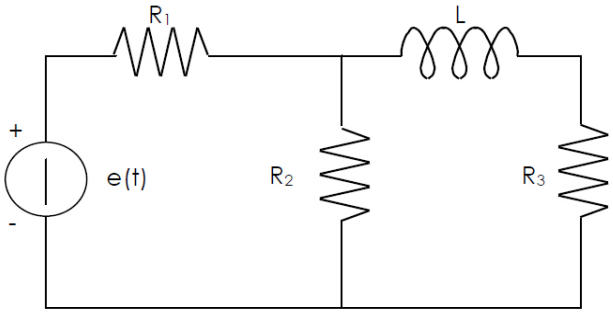


7.12. Per t=0 quanto vale il valore assoluto della corrente i(t) dell'induttore di figura? Quanto vale la costante di tempo?

(e(t) =Eu(–t)+3Eu(t); E=3A; R_1=1 Ω; R_2=2 Ω; R_3=2 Ω; L=10mH; u(t) funzione gradino unitario)

$$|i(0)| = \frac{3}{4} A$$

$\tau = 37.5 \times 10^{-4}\text{s}$

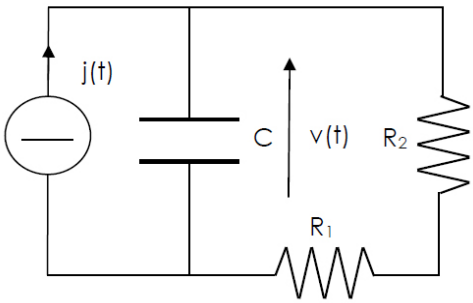


7.13. Per t–>∞ quanto vale la tensione $v(t)$ sul condensatore presente nel circuito di figura? Quanto vale la costante di tempo τ del circuito di figura?

(j(t) =Ju(–t) +3Ju(t); J=3A; R_1=10 Ω; R_2=20 Ω; C=0.1mF; u(t) funzione gradino unitario)

$v(t)$ =270V t–>∞

$\tau = 3 \times 10^{-3}\text{s}$



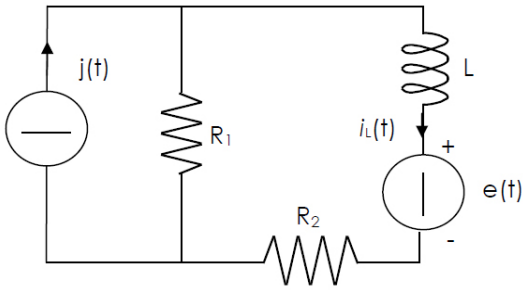
7.14. Per t–>∞ quanto vale la corrente $i_L(t)$ dell'induttore presente nel circuito di figura?

Per t= τ quanto vale la corrente $i_L(t)$ presente nel circuito di figura?

(j(t) =Ju(–t) +3Ju(t); J=3A; e(t) = Eu(t); E=5V; R_1=10Ω; R_2=10Ω; L=10mH; $i_L(0)$=0; τ costante di tempo del circuito; u(t) funzione gradino unitario)

$i_L(t)$ = 4.25A t–>∞

$i_L(\tau)$ = 2.69A

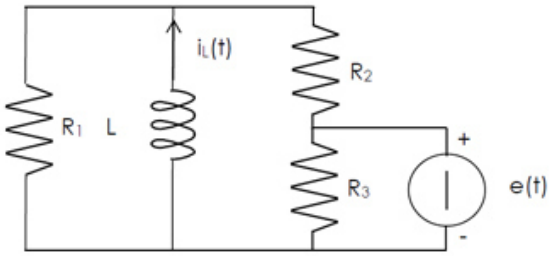


7.15. Quale è il valore della costante di tempo τ del circuito di figura? Quale è la soluzione della corrente $i_L(t)$ indicata in figura?

($e(t)$ =2V; R_1=10 Ω; R_2=5 Ω; R_3=5 Ω; L=0.1mH; $i_L(0)$=3A)

$\tau = 3\times10^{-5}\text{s}$

$$i_L(t) = \left(\frac{17}{5}\times e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{2}{5}\right)\text{A}$$

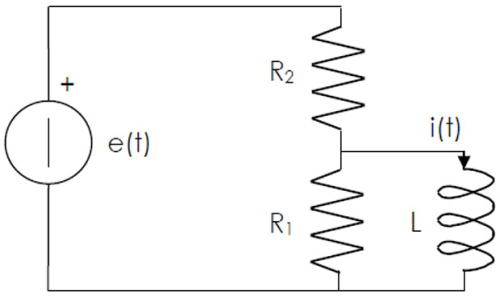


7.16. Per t=0 quanto vale il valore della corrente $i(t)$ dell'induttore di figura? Quale è il termine transitorio $i_0(t)$ della corrente $i(t)$ del seguente circuito di figura?

($e(t)$ =E$u(-t)$ +2E$u(t)$; E=2V; R_1=20 Ω; R_2=20 Ω; L=10mH; $u(t)$ funzione gradino unitario)

$i(0)$=0.1 A

$$i_0(t) = -0.1\times e^{-1000t}\text{A}$$

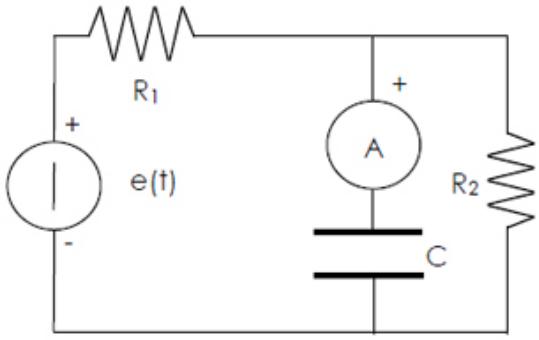


7.17. Per $t=2\tau$ quanto vale la corrente $i(t)$ misurata dall'amperometro presente nel circuito di figura, e quale è il termine di regime della corrente $i_p(t)$ misurata dall'amperometro:

($e(t)=Eu(t)$; E=20V; R_1 =10 Ω; R_2=10 Ω; C=0,01mF; $v_C(0)$ = 0; τ costante di tempo del circuito; $v_C(t)$ tensione del condensatore)

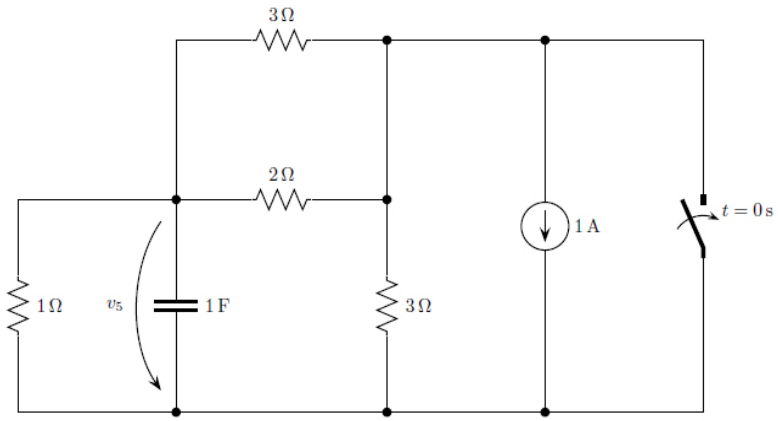
$i(2\tau)$ = 0.271 A

$i_p(t)$=0A



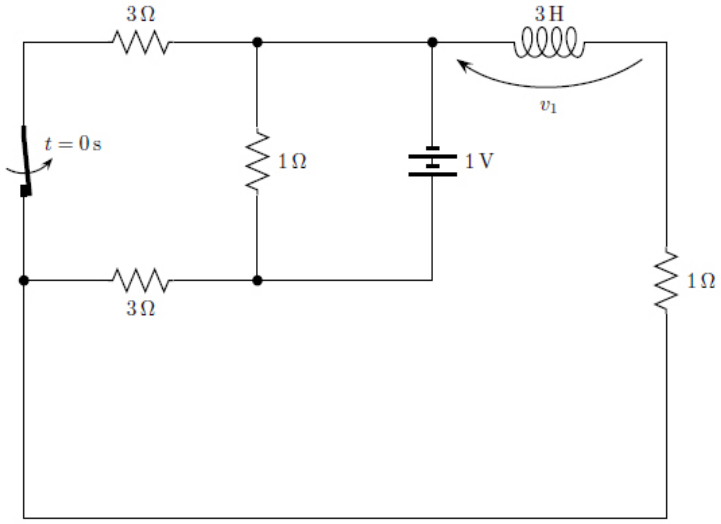
7.18. @ Calcolare la tensione $v_5(t)$ del circuito di figura per $t>0$:

$$v_5(t)=\left(\frac{15}{26}\times e^{-\frac{11}{6}t}+0\right)\text{V}$$



7.19. @ Calcolare la tensione $v_1(t)$ del circuito di figura per $t>0$:

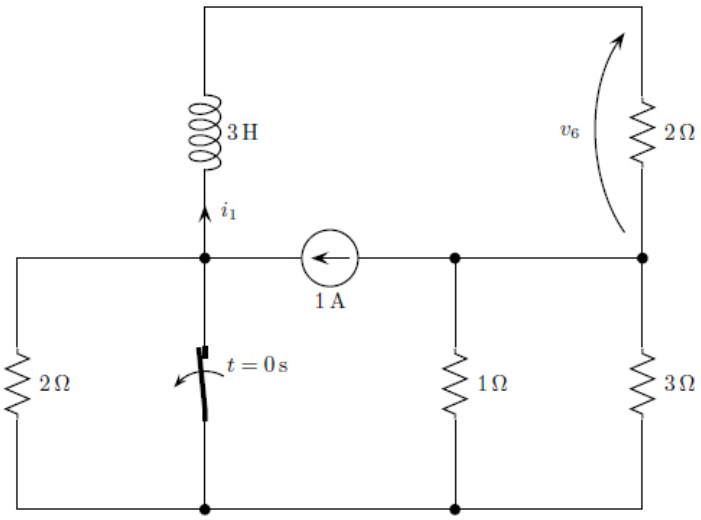
$$v_1(t) = \left(-\frac{1}{5} \times \mathrm{e}^{-\frac{4}{3}t} + 0 \right) \mathrm{V}$$



7.20. @ Calcolare la tensione $i_1(t)$ e $v_6(t)$ del circuito di figura per $t>0$:

$$i_1(t) = \left(-0.306 \times \mathrm{e}^{-\frac{19}{12}t} + \frac{11}{19} \right) \mathrm{A}$$

$$v_6(t) = \left(-0.612 \times \mathrm{e}^{-\frac{19}{12}t} + \frac{22}{19} \right) \mathrm{V}$$


3 H
i_1
1 A
v_6
2 Ω
2 Ω
$t = 0$ s
1 Ω
3 Ω