Lezione 10

I doppi bipoli.
Il teorema di reciprocità

Lezioni di **Elettrotecnica** per studenti di **Ingegneria Gestionale**

ideate e scritte da

Lorenza Corti

con il contributo di **Vincenzo Paolo Loschiavo**

Sommario

1 L'N–polo 4

2 I doppi bipoli 7

2.1 Il grafo di un doppio bipolo 10

2.2 La caratterizzazione di un doppio bipolo 10

2.3 La potenza assorbita da un doppio bipolo 13

3 I doppi bipoli a–dinamici lineari tempo–invarianti 15

3.1 La caratterizzazione di un doppio bipolo resistivo 16

3.1.1 La caratterizzazione in corrente e la matrice delle resistenze 16

3.1.2 La caratterizzazione in tensione e la matrice delle conduttanze 19

3.1.3 La caratterizzazione ibrida e le matrici ibride 23

3.1.4 La matrice di trasmissione* 30

3.2 I problemi di analisi 33

3.2.1 Esercizio con matrice delle resistenze 36

3.2.2 Esercizio con matrice delle conduttanze 38

3.2.3 Esercizio con matrice ibrida 41

3.3 I problemi di sintesi 43

3.3.1 Esercizio 46

3.4 I circuiti con doppi bipoli di resistenze 47

3.4.1 Esercizio 47

3.5 La potenza assorbita da un doppio bipolo di resistenze 50

4 I doppi bipoli di impedenze 52

4.1 La caratterizzazione di un doppio bipolo di impedenze 52

4.1.1 La matrice delle impedenze 53

4.1.2 La matrice delle ammettenze 54
4.1.3 Le matrici ibride nel dominio simbolico 54
4.1.4 La matrice di trasmissione nel dominio simbolico 56
4.2 I circuiti con doppi bipoli di impedenze 57
4.2.1 Esercizio con matrice delle impedenze 57
5 I teoremi di reciprocità 61
5.1 I forma 62
5.2 II forma 66
5.3 III forma 68
6 I generatori controllati* 71
6.1 Il generatore di tensione controllato in tensione 71
6.2 Il generatore di tensione controllato in corrente 72
6.3 Il generatore di corrente controllato in tensione 73
6.4 Il generatore di corrente controllato in corrente 74
Indice delle figure 76
Domande 79
Teoria 79
Esercizi 91

1 L'N–polo

Sebbene i bipoli (elementi con due terminali) siano gli elementi più comuni, esistono numerosi elementi circuitali con N terminali (ad esempio i transistori che hanno tre morsetti, i trasformatori che ne hanno quattro, …). Ricordiamo, ad esempio, che abbiamo incontrato dei 3-poli resistivi quando ci siamo imbattuti nelle configurazioni di resistenze a stella e triangolo nel § 7 della Lezione 4.

Ad un elemento a N terminali si dà il nome di ***N–polo***. Il simbolo usato per questo elemento è rappresentato in Fig. 10.1 dove abbiamo scelto di rappresentare un elemento a tre terminali.

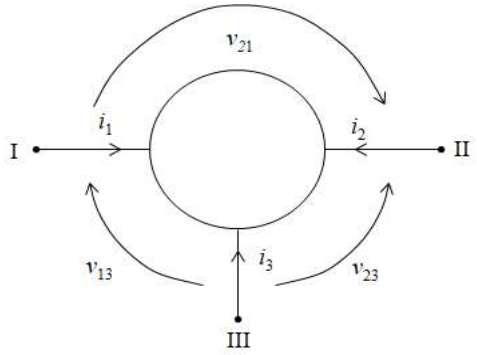


Fig. 10.1 – Rappresentazione di un generico 3–polo.

Un N–polo è individuato da una N–pla di correnti e di tensioni. Per il 3–polo preso in considerazione in Fig. 10.1 abbiamo le tre correnti $i_1(t), i_2(t), i_3(t)$ e le tre tensioni $v_{13}(t), v_{21}(t), v_{23}(t)$ tra loro dipendenti, in quanto devono soddisfare le leggi di Kirchhoff, nel modo seguente:

$$i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) = 0 \tag{10.1}$$

$$v_{13}(t) + v_{21}(t) - v_{23}(t) = 0 \tag{10.2}$$

Come conseguenza della relazione (10.1), delle tre correnti, una dipende dalle altre due.

Per quanto riguarda le tensioni, ci viene in aiuto la LKT e possiamo dimostrare l'espressione (10.2) introducendo i ***potenziali di nodo*** $\phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t)$,come abbiamo fatto nel § 2.3 della Lezione 3. Esprimendo le tensioni $v_{13}(t), v_{21}(t), v_{23}(t)$ in funzione dei potenziali di nodo si ha:

$$v_{13}(t) = \phi_1(t) - \phi_3(t) \tag{10.3}$$

$$v_{21}(t) = \phi_2(t) - \phi_1(t) \tag{10.4}$$

$$v_{23}(t) = \phi_2(t) - \phi_3(t) \tag{10.5}$$

Grazie alle (10.3), (10.4) e (10.5) l'equazione (10.2) è automaticamente soddisfatta, infatti:

$$\phi_1(t) - \phi_2(t) = \phi_1(t) - \phi_3(t) + \phi_3(t) - \phi_2(t) \tag{10.6}$$

È chiaro che le equazioni (10.1) e (10.2) devono essere utilizzate insieme alle altre equazioni di Kirchhoff del circuito in cui è inserito il 3−polo. Si dovranno poi aggiungere le relazioni caratteristiche dei bipoli del circuito, e chiaramente anche quelle del 3−polo.

Come esempio, scriviamo le equazioni necessarie a descrivere il funzionamento del circuito di Fig. 10.2 in cui è presente un 3-polo a−dinamico (costituito da sole resistenza).

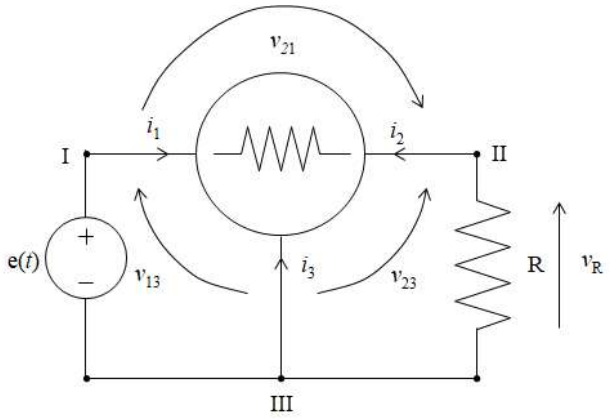


Fig. 10.2 – 3–polo inserito in un circuito.

Per il circuito di Fig. 10.2 possiamo scrivere:

$$\begin{cases} i_1(t)+i_2(t)+i_3(t)=0 \\ v_{13}(t)+v_{21}(t)-v_{23}(t)=0 \\ v_{13}(t)=\mathrm{e}(t) \\ v_{23}(t)=-\mathrm{R}i_2(t) \\ v_{13}(t)=r_1\left(i_1(t),i_2(t)\right) \\ v_{23}(t)=r_2\left(i_1(t),i_2(t)\right) \end{cases} \tag{10.7}$$

dove la prima equazione deriva dalla LKC al nodo III (che coincide con la equazione (10.1) cui deve soddisfare il 3–polo), la seconda equazione è la (10.2) del 3–polo, la terza equazione rappresenta la LKT alla maglia di sinistra dove abbiamo sostituito direttamente la relazione caratteristica del generatore di tensione, la quarta rappresenta la LKT alla maglia di destra dove abbiamo sostituito direttamente la relazione caratteristica del resistore R, le ultime due equazioni rappresentano, attraverso le funzioni $r_1(.)$ e $r_2(.)$ le relazioni caratteristiche del 3–polo a–dinamico presente nel circuito. Si vede che il sistema (10.7) è un sistema di 6 equazioni in 6 incognite. Non specifichiamo le relazioni $r_1(.)$ e $r_2(.)$ del 3–polo di resistenze, e quindi, in generale, non affronteremo la caratterizzazione di un N–polo, lasciando questo tema a corsi superiori. Nel prossimo paragrafo, invece, approfondiremo, il tema della caratterizzazione di un 4–polo particolare che chiameremo ***doppio–bipolo***.

2 I doppi bipoli

Per definire cosa è un doppio bipolo partiamo da un 4–polo. Consideriamo un 4–polo come rappresentato in Fig. 10.3[1].

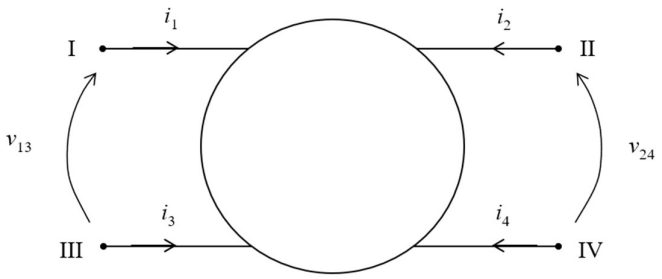
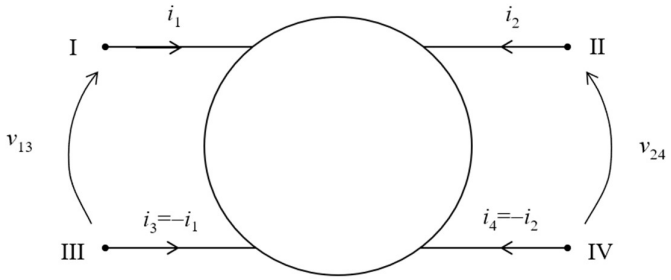


Fig. 10.3 – Un 4-polo.

Un 4–polo viene detto ***doppio bipolo*** se le correnti di due terminali dipendono dalle altre due. Formalmente, ciò accade se risulta soddisfatta la condizione:

$$i_1(t) = -i_3(t); \quad i_2(t) = -i_4(t) \tag{10.8}$$

Le condizioni (10.8) che devono valere affinché un 4–polo si comporti come un doppio bipolo si chiamano ***condizioni di porta***. Detto in altre parole, un doppio bipolo è un 4–polo che soddisfa le condizioni di porta come mostrato in Fig. 10.4.



[1] I 4 terminali del 4–polo li abbiamo rappresentati a due a due paralleli per ragioni grafiche e perché stiamo per definire il doppio bipolo che, come vedremo tra poco, si rappresenta in maniera che i 4 terminali si ripartiscono in due coppie di terminali chiamate ***porte***.

Fig. 10.4 – Un 4-polo che soddisfa le condizioni di porta per essere un doppio bipolo.

Il doppio−bipolo, che è un 4−polo che soddisfa le condizioni (10.8), ha due porte: la ***porta*** dei terminali 1−3 e quella dei terminali 2−4. In genere, la porta a sinistra del disegno del doppio bipolo (la coppia 1−3) si chiama ***porta primaria***, e quella a destra del disegno (la coppia 2−4) ***porta secondaria***.

Abbiamo rappresentato in Fig. 10.5 un doppio bipolo. Si osservi, nella simbologia utilizzata per i doppi bipoli, che non si indicano le due correnti i_3 e i_4 (essendo queste uguali alle rispettive ***correnti di porta*** i_1 e i_2), e che le ***tensioni di porta*** si denominano v_1 alla porta primaria e v_2 alla porta secondaria. Inoltre, osserviamo anche che i terminali accoppiati si indicano rispettivamente con 1-1' e 2-2'.

In Fig. 10.5, alle due porte abbiamo fatto la convenzione dell'utilizzatore.

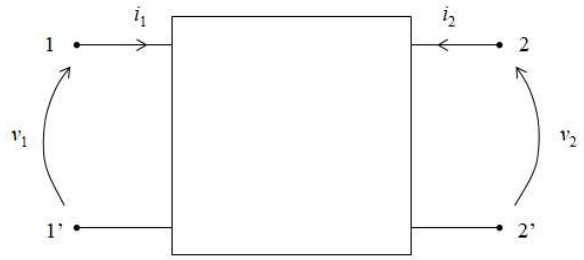


Fig. 10.5 – Un doppio bipolo.

La condizione (10.8), necessaria affinché un 4−polo sia un doppio bipolo, può essere verificata dalla natura intrinseca del componente oppure da come il componente è connesso al resto del circuito. L'esempio tipico del primo caso è il ***trasformatore*** che studieremo nella prossima Lezione 11, oppure i ***generatori controllati*** che studieremo nel § 6 di questa Lezione. Il secondo caso riguarda, ad esempio, i ***doppi bipoli a−dinamici*** trattati nel § 3 e, più in generale, i ***doppi bipoli di impedenze*** trattati nel § 4.

In un sistema costituito da resistenze (ma vale lo stesso anche per un circuito di impedenze) la condizione (10.8) è garantita dal fatto che le due coppie di morsetti 1-1' e 2-2' sono collegate ognuna ad un sotto−circuito, e quindi ad un bipolo (equivalente). In Fig. 10.6 abbiamo rappresentato tale caso. I sotto-circuiti collegati alla porta primaria e secondaria possono contenere qualsivoglia tipo di bipolo. Siamo interessati al doppio

bipolo e, come vedremo nel § 3, alla sua caratterizzazione che non dipende da cosa abbia collegato alle due porte.

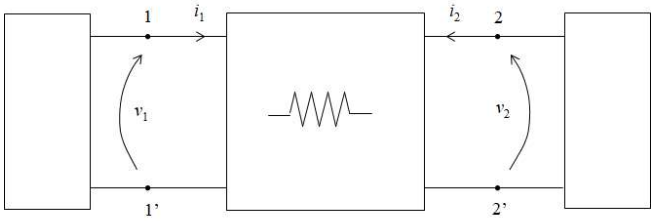


Fig. 10.6 – Doppio bipolo a–dinamico terminato con due bipoli alle porte.

Come abbiamo già affermato, non è detto che un 4-polo a–dinamico o di impedenze si comporti come un doppio bipolo. Ne è l'esempio il circuito in Fig. 10.7, dove evidentemente la condizione (10.8) non è verificata. Infatti, dalla I legge di Kirchhoff al terminale 1', abbiamo:

$$i_1(t) - i_3(t) + i_d(t) = 0 \tag{10.9}$$

Dalla quale risulta evidente che $i_1(t) \neq -i_3(t)$.

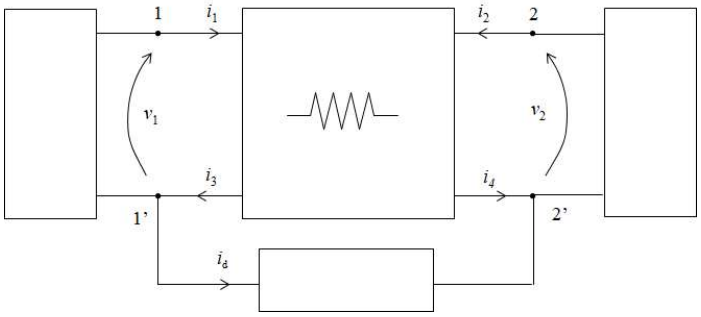


Fig. 10.7 – Circuito con un 4-polo a–dinamico che non realizza un doppio bipolo

Riassumendo, in un doppio bipolo le due porte, primaria 1-1' e secondaria 2-2', sono caratterizzate dalle loro tensioni, $v_1(t)$ e $v_2(t)$ e dalle loro correnti, $i_1(t)$ e $i_2(t)$ come mostrato in Fig. 10.5.

2.1 Il grafo di un doppio bipolo

Nella Lezione 2, quando abbiamo introdotto le nozioni di topologia della teoria dei grafi non abbiamo tenuto conto di componenti diversi dal bipolo, come appunto i doppi bipoli. In questo paragrafo, per completezza, vogliamo definire il grafo di un doppio bipolo.

Il grafo di un doppio bipolo lo abbiamo rappresentato in Fig. 10.8 e come si può osservare esso è costituito da due lati e da 4 nodi e risulta non connesso. Ciò deriva dal fatto che le tensioni e le correnti alle due porte del doppio bipolo non sono legate dalle leggi di Kirchhoff ma dalle relazioni caratteristiche del doppio bipolo. Nel prossimo paragrafo ci occuperemo di identificare tali relazioni nel caso dei doppi dipoli di resistenze, nel § 4 troveremo le relazioni caratteristiche dei doppi bipoli di impedenze.

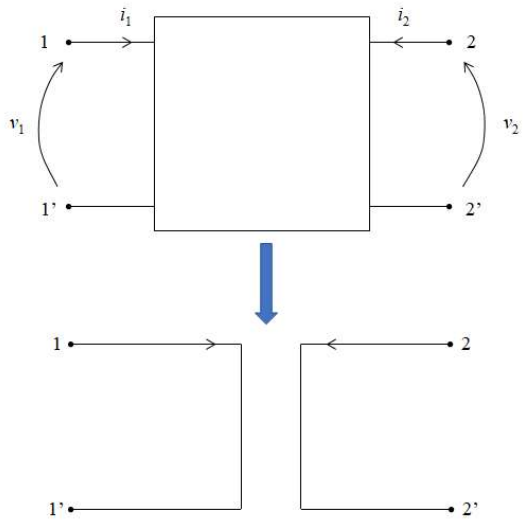


Fig. 10.8 – Grafo di un doppio bipolo.

2.2 La caratterizzazione di un doppio bipolo

Vogliamo ora ***caratterizzare*** il doppio bipolo. Vogliamo, cioè, determinare delle relazioni che legano le quattro grandezze ai terminali $i_1(t)$, $i_2(t)$, $v_1(t)$ e $v_2(t)$ e quindi un sistema di due equazioni in cui esprimiamo un legame tra due delle quattro grandezze in funzione delle altre due. Abbiamo fatto lo stesso per un bipolo quando abbiamo introdotto, nel § 3 della Lezione 1, la sua relazione caratteristica. Per poter scrivere le relazioni caratteristiche di un doppio bipolo dobbiamo stabilire quali coppie di grandezze

consideriamo indipendenti e quali dipendenti. Abbiamo fatto lo stesso quando abbiamo introdotta la caratterizzazione in corrente o in tensione di un bipolo.

Nel seguito elenchiamo i vari casi:

- $v_1(t)$ e $v_2(t)$ in funzione di $i_1(t)$ e $i_2(t)$. In questo caso parleremo di ***caratterizzazione in corrente*** e possiamo scrivere:

$$\begin{cases} v_1(t) = r_1\left(i_1(t), i_2(t)\right) \\ v_2(t) = r_2\left(i_1(t), i_2(t)\right) \end{cases} \tag{10.10}$$

- $i_1(t)$ e $i_2(t)$ in funzione di $v_1(t)$ e $v_2(t)$. In questo caso parleremo di ***caratterizzazione in tensione***:

$$\begin{cases} i_1(t) = g_1\left(v_1(t), v_2(t)\right) \\ i_2(t) = g_2\left(v_1(t), v_2(t)\right) \end{cases} \tag{10.11}$$

- $v_1(t)$ e $i_2(t)$ (o $i_1(t)$ e $v_2(t)$) in funzione di $i_1(t)$ e $v_2(t)$ (o $v_1(t)$ e $i_2(t)$). In questo caso abbiamo una ***caratterizzazione ibrida***:

$$\begin{cases} v_1(t) = h_{11}\left(i_1(t), v_2(t)\right) \\ i_2(t) = h_{12}\left(i_1(t), v_2(t)\right) \end{cases} \tag{10.12}$$

e

$$\begin{cases} i_1(t) = h_{21}\left(v_1(t), i_2(t)\right) \\ v_2(t) = h_{22}\left(v_1(t), i_2(t)\right) \end{cases} \tag{10.13}$$

Ciò premesso, chiariamo più approfonditamente cosa significa caratterizzare un doppio bipolo. Essenzialmente significa individuare delle relazioni che legano tra loro le grandezze alle porte. Così come per il semplice bipolo la caratterizzazione si sostanziava in una singola equazione, per il doppio bipolo si sostanzia in una coppia di equazioni come si può osservare dalle (10.10) - (10.13). Le incognite di un bipolo sono due, tensione e corrente, le incognite di un doppio bipolo sono quattro, le due tensioni e le due correnti.

L'identità di un bipolo è la sua relazione caratteristica, l'identità di un doppio bipolo è il suo sistema di relazioni caratteristiche. Il sistema che stiamo studiando si chiama doppio bipolo in quanto la sua caratterizzazione è costituita dal doppio delle equazioni necessarie ad un bipolo. Ciò che è interessante in un doppio bipolo è che ognuna delle due grandezze dipendenti dipende da entrambe le grandezze indipendenti. In altre parole, ciò che accade ad una porta dipende contemporaneamente da ciò che accade alle due porte.

Le grandezze indipendenti possiamo concepirle come imposte al doppio bipolo da due ***generatori di caratterizzazioni*** opportuni posti alle due porte. Nelle Fig. 10.9, Fig. 10.10, Fig. 10.11 e Fig. 10.12 abbiamo rappresentato rispettivamente le (10.10), (10.11), (10.12) e (10.13) con gli opportuni generatori di caratterizzazione.

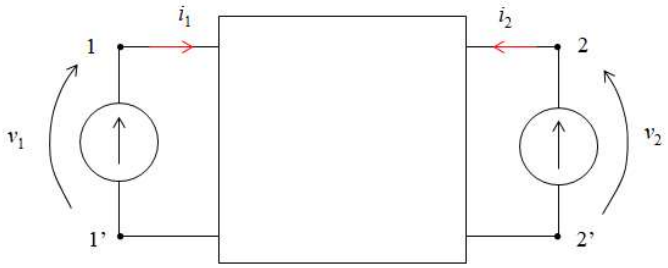


Fig. 10.9 – Doppio bipolo controllato in corrente.

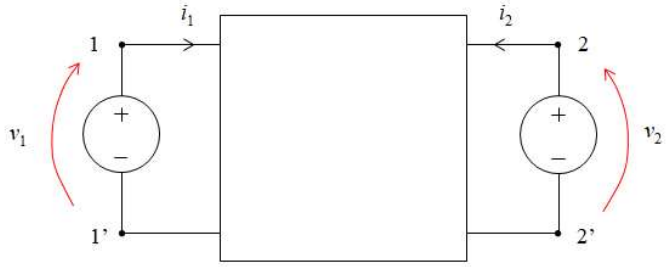


Fig. 10.10 – Doppio bipolo controllato in tensione.

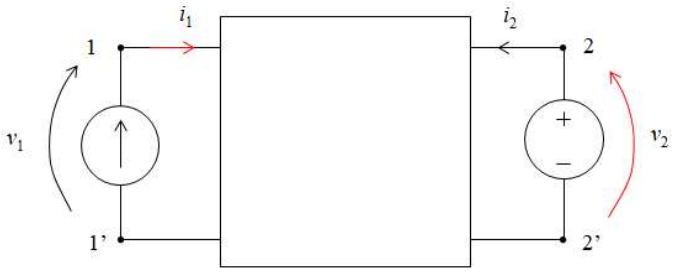


Fig. 10.11 – Doppio bipolo controllato in maniera ibrida.

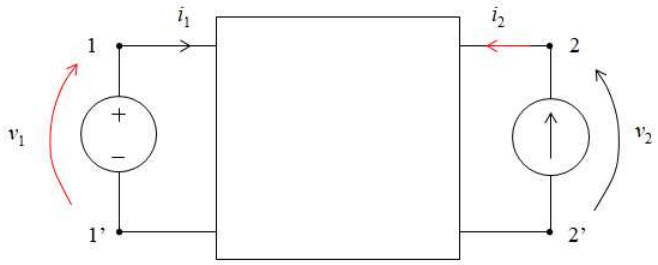


Fig. 10.12 – Doppio bipolo controllato in maniera ibrida.

2.3 La potenza assorbita da un doppio bipolo

In questo paragrafo vogliamo rispondere alla domanda: quale è la potenza assorbita da un doppio bipolo?

Facendo riferimento alla Fig. 10.5, definiamo la potenza assorbita da un doppio bipolo p(t):

$$\mathrm{p}(t) = v_1(t) i_1(t) + v_2(t) i_2(t) \qquad (10.14)$$

Nella (10.14) abbiamo sommato i due termini relativi alle potenze assorbite alla prima porta e alla seconda porta. Entrambi i termini hanno segno positivo in quanto abbiamo fatto la convenzione dell'utilizzatore sulle due porte.

Il valore effettivo della potenza espressa nella (10.14) dipenderà dal tipo di bipolo che si sta esaminando. Come vedremo nella Lezione 11, ad esempio, il trasformatore non assorbe potenza. Nel caso di doppi bipoli di resistenze il valore della potenza assorbita dipende dalla configurazione di resistenze interna al doppio bipolo, nonché dai due sotto-

circuiti collegati alle due sue porte. Pertanto, la potenza assorbita va calcolata nel caso specifico di ogni circuito. Ciò lo vedremo nel § 3 e nel § 4.

3 I doppi bipoli a–dinamici

I doppi bipoli a–dinamici sono dei doppi bipoli realizzati unicamente da resistori. Le due porte 1-1' e 2-2' sono caratterizzate dalle loro tensioni, V_1 e V_2 e dalle loro correnti, I_1 e I_2 come abbiamo mostrato in Fig. 10.13[2].

All'interno del doppio bipolo, si possono avere un qualsivoglia numero di resistenze collegate nei modi più disparati. Come vedremo nel § 3.3 esistono delle configurazioni molto semplici (configurazione a T e a Π) alle quali ogni tipo di doppio bipolo resistivo può ricondursi.

Come abbiamo detto nel § 2, la condizione (10.8), nel caso di doppi bipoli di resistenze, non è sempre verificata. Lo è certamente quando il doppio bipolo ha collegato alle due porte due sotto–circuiti come abbiamo mostrato in Fig. 10.6.

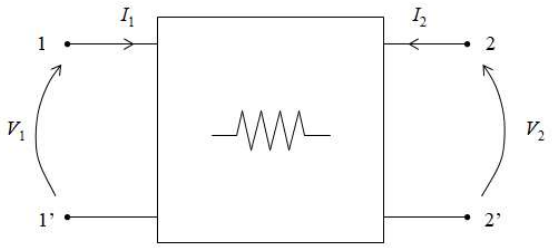


Fig. 10.13 – Doppio bipolo di resistenze.

Noi studieremo un caso particolare di doppio bipolo a–dinamico: i doppi bipoli a–dinamici lineari tempo–invarianti sono dei doppi bipoli realizzati unicamente da resistori lineari tempo–invarianti. Nel caso in cui il doppio bipolo sia costituito da resistenze lineari e tempo–invarianti la caratterizzazione del sotto–circuito a due porte si sostanzia di una matrice 2x2 di coefficienti costanti. Vedremo nei prossimi paragrafi come determinare queste matrici.

[2] Poiché il doppio bipolo è realizzato con delle resistenze, utilizziamo, come abbiamo fatto nella Lezione 4 e 5, i simboli V e I per la tensione e la corrente, omettendo la dipendenza dal tempo che per circuiti resistivi è inessenziale.

3.1 La caratterizzazione di un doppio bipolo a–dinamico lineare e tempo invariante

Vogliamo ora caratterizzare il doppio bipolo di resistenze. Distinguiamo nel seguito le diverse possibili caratterizzazioni in base a quanto detto per le (10.10) – (10.13).

3.1.1 La caratterizzazione in corrente e la matrice delle resistenze

Cominciamo col vedere il primo caso, delle (10.10).

Se esprimiamo le tensioni in funzione delle correnti possiamo immaginare di variare le correnti alle due porte e quindi mettere due generatori di caratterizzazione che sono dei generatori ideali di corrente come in Fig. 10.14. In riferimento a tale figura, possiamo scrivere:

$$\begin{cases} V_1 = \mathrm{R}_{11} I_1 + \mathrm{R}_{12} I_2 \\ V_2 = \mathrm{R}_{21} I_1 + \mathrm{R}_{22} I_2 \end{cases} \tag{10.15}$$

dove abbiamo introdotto la matrice delle resistenze $\mathbf{R}$:

$$\mathbf{R} = \begin{vmatrix} \mathrm{R}_{11} & \mathrm{R}_{12} \\ \mathrm{R}_{21} & \mathrm{R}_{22} \end{vmatrix} \tag{10.16}$$

che è la matrice di caratterizzazione in corrente di un doppio bipolo.

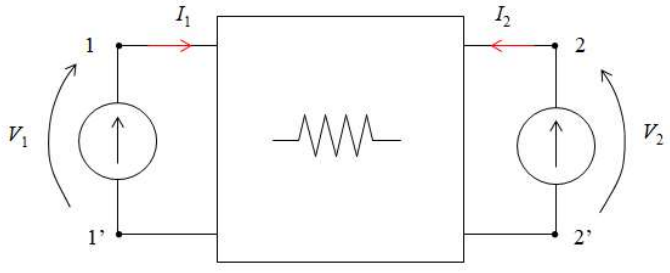


Fig. 10.14 – Caratterizzazione in corrente di un doppio bipolo di resistenze.

I coefficienti della matrice **R** li possiamo determinare valutando in modo opportuno il rapporto delle grandezze alle due porte. Esaminiamo i vari casi che corrispondono ai vari coefficienti.

Dal sistema (10.15):

$$\mathrm{R}_{11} = \frac{V_{11}}{I_1} = \frac{V_1}{I_1}\bigg|_{I_2=0} \tag{10.17}$$

dove V_{11} è la tensione alla prima porta quando il generatore della porta secondaria è spento come mostrato nel circuito ausiliare di Fig. 10.15. La R_{11} è detta ***resistenza propria*** della porta primaria, e rappresenta la resistenza equivalente vista dal generatore di caratterizzazione alla prima porta quando il generatore alla seconda porta è spento.

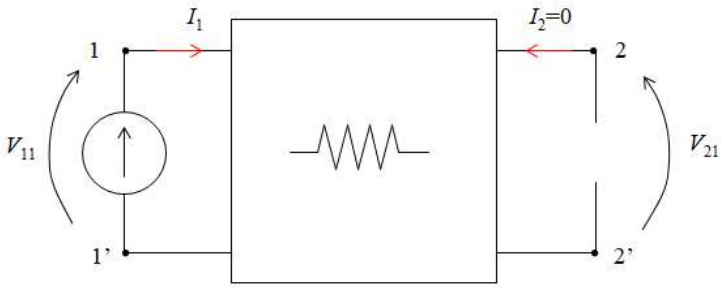


Fig. 10.15 – Circuito ausiliare del circuito di Fig. 10.14 con generatore spento al secondario.

Vediamo la ***resistenza propria*** alla porta secondaria. Dal sistema (10.15):

$$\mathrm{R}_{22} = \frac{V_{22}}{I_2} = \frac{V_2}{I_2}\bigg|_{I_1=0} \tag{10.18}$$

dove V_{22} è la tensione alla seconda porta quando il generatore della porta primaria è spento come mostrato nel circuito ausiliare di Fig. 10.16. La R_{22} è detta ***resistenza propria*** della porta secondaria, e rappresenta la resistenza equivalente vista dal generatore di caratterizzazione alla seconda porta quando il generatore alla prima porta è spento.

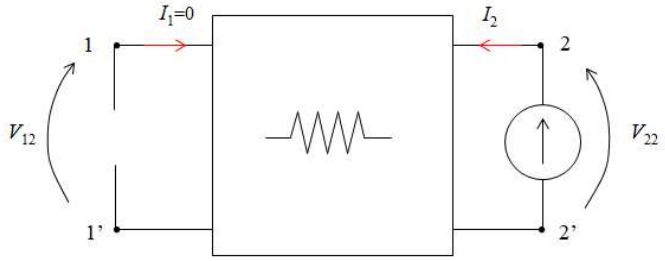


Fig. 10.16 – Circuito ausiliare del circuito di Fig. 10.14 con generatore spento al primario.

Le resistenze nella diagonale secondaria della matrice **R**, R_{12} e R_{21} si chiamano ***resistenze mutue***. Si ha che:

$$R_{12} = \frac{V_{12}}{I_2} = \left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{I_1=0} \quad ; \quad R_{21} = \frac{V_{21}}{I_1} = \left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0} \tag{10.19}$$

dove V_{12} è la tensione alla prima porta quando il generatore della porta è spento come mostrato nel circuito ausiliare di Fig. 10.16 e dove V_{21} è la tensione alla seconda porta quando il generatore della porta è spento come mostrato nel circuito ausiliare di Fig. 10.15.

La R_{12} è detta ***resistenza mutua*** della porta primaria, e la R_{21} è detta ***resistenza mutua*** della porta secondaria. Questi coefficienti, sebbene aventi la dimensioni fisiche di una resistenza, e quindi espressi in Ω, NON rappresentano una resistenza equivalente reale e quindi possono essere di segno qualsiasi. Come vedremo tra poco, in virtù del teorema di reciprocità (vedi § 5), le due resistenze mutue sono uguali.

La matrice **R** gode di alcune proprietà.

Avendo fatto la convenzione dell'utilizzatore alla prima porta, la resistenza R_{11} è non negativa ($R_{11} \geq 0$), analogamente per R_{22}. Quindi:

$$R_{11} \geq 0; \quad R_{22} \geq 0 \tag{10.20}$$

Per quanto riguarda gli elementi nella diagonale secondaria, si dimostra che la matrice **R** è simmetrica cioè:

$$R_{12} = R_{21} = R_m \tag{10.21}$$

e quindi esiste un'unica ***resistenza mutua***. La (10.21) si dimostra grazie al ***teorema di reciprocità,*** enunciato nel § 5, in questo caso, applicato ai due circuiti ausiliari di Fig. 10.15 e Fig. 10.16. In particolare, si veda la (10.133) del § 5. Il doppio bipolo in questo caso lo diciamo ***doppio bipolo reciproco***.

Il sistema (10.15) si può riscrivere come:

$$\begin{cases} V_1 = R_{11} I_1 + R_m I_2 \\ V_2 = R_m I_1 + R_{22} I_2 \end{cases} \tag{10.22}$$

Un'altra proprietà della matrice **R**, conseguenza della proprietà di non amplificazione delle correnti (vedi § 7 della lezione 3) è:

$$|R_m| \le R_{11} \text{ e } |R_m| \le R_{22} \tag{10.23}$$

3.1.2 La caratterizzazione in tensione e la matrice delle conduttanze

Vediamo il secondo caso, delle (10.11).

Se esprimiamo le correnti in funzione delle tensioni possiamo immaginare di variare le tensioni alle due porte e quindi mettere due generatori di caratterizzazione che sono dei generatori ideali di tensione come in Fig. 10.17. In riferimento a tale figura, possiamo scrivere:

$$\begin{cases} I_1 = G_{11} V_1 + G_{12} V_2 \\ I_2 = G_{21} V_1 + G_{22} V_2 \end{cases} \tag{10.24}$$

dove abbiamo introdotto la matrice delle conduttanze **G**:

$$\mathbf{G} = \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{vmatrix} \tag{10.25}$$

che è la matrice di caratterizzazione in tensione di un doppio bipolo.

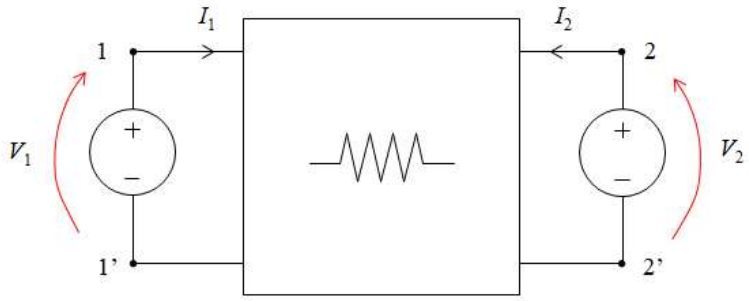


Fig. 10.17 – Caratterizzazione in tensione di un doppio bipolo di conduttanze.

I coefficienti della matrice **G** li possiamo determinare valutando in modo opportuno il rapporto delle grandezze alle due porte. Esaminiamo i vari casi che corrispondono ai vari coefficienti.

Dal sistema (10.24):

$$G_{11} = \frac{I_{11}}{V_1} = \frac{I_1}{V_1}\bigg|_{V_2=0} \tag{10.26}$$

dove I_{11} è la corrente alla prima porta quando il generatore della porta secondaria è spento, come mostrato nel circuito ausiliare di Fig. 10.18. La G_{11} è detta ***conduttanza propria*** della porta primaria e rappresenta la conduttanza equivalente vista dal generatore di caratterizzazione alla prima porta quando il generatore alla seconda porta è spento.

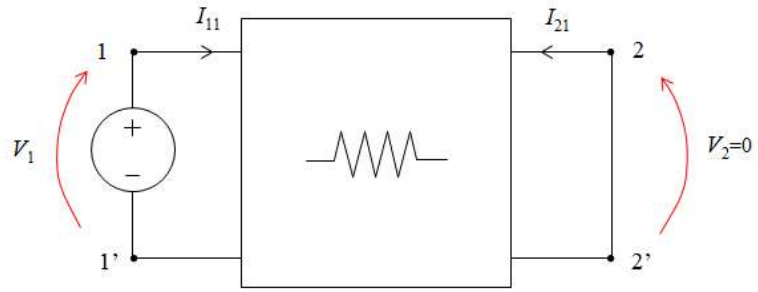


Fig. 10.18 – Circuito ausiliare del circuito di Fig. 10.17 con generatore spento al secondario.

Vediamo la ***conduttanza propria*** alla porta secondaria. Dal sistema (10.24):

$$\mathrm{G}_{22} = \frac{I_{22}}{V_2} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{V_1=0} \tag{10.27}$$

dove I_{22} è la corrente alla seconda porta quando il generatore della porta primaria è spento come mostrato nel circuito ausiliare di Fig. 10.19. La G_{22} è detta ***conduttanza propria*** della porta secondaria, e rappresenta la conduttanza equivalente vista dal generatore di caratterizzazione alla seconda porta quando il generatore alla prima porta è spento.

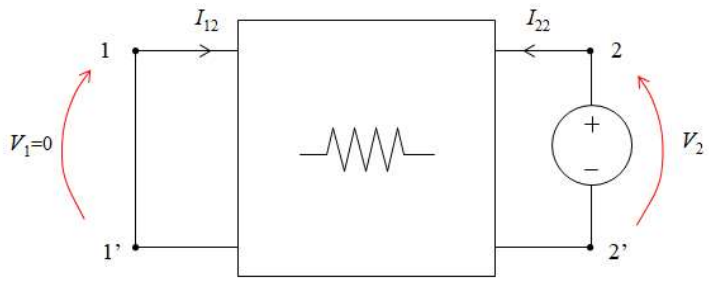


Fig. 10.19 – Circuito ausiliare del circuito di Fig. 10.17 con generatore spento al primario.

Le conduttanze nella diagonale secondaria della matrice **G**, G_{12} e G_{21} si chiamano ***conduttanze mutue***. Si ha che:

$$\mathrm{G}_{12} = \frac{I_{12}}{V_2} = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{V_1=0} \quad ; \quad \mathrm{G}_{21} = \frac{I_{21}}{V_1} = \left.\frac{I_2}{V_1}\right|_{V_2=0} \tag{10.28}$$

dove I_{12} è la corrente alla prima porta quando il generatore della porta è spento come mostrato nel circuito ausiliare di Fig. 10.19, e dove I_{21} è la corrente alla seconda porta quando il generatore della porta è spento come mostrato nel circuito ausiliare di Fig. 10.18.

La G_{12} è detta ***conduttanza mutua*** della porta primaria, e la G_{21} è detta ***conduttanza mutua*** della porta secondaria. Questi coefficienti, sebbene aventi la dimensioni fisiche dell'inverso di una resistenza, e quindi espressi in Ω^{-1}, NON rappresentano una conduttanza equivalente reale e quindi possono essere di segno qualsiasi. Come vedremo

tra poco, in virtù del teorema di reciprocità (vedi § 5), le due conduttanze mutue sono uguali.

La matrice **G** gode di proprietà analoghe alla matrice **R**.

Avendo fatto la convenzione dell'utilizzatore alla prima porta, la conduttanza G_{11} è non negativa ($G_{11}\geq 0$), analogamente per G_{22}. Quindi:

$$G_{11} \geq 0; \quad G_{22} \geq 0 \tag{10.29}$$

Per quanto riguarda gli elementi nella diagonale secondaria, si dimostra che la matrice **G** è simmetrica cioè:

$$G_{12} = G_{21} = G_m \tag{10.30}$$

e quindi esiste un'unica ***conduttanza mutua***. La (10.30) si dimostra grazie al ***teorema di reciprocità,*** enunciato nel § 5, applicato ai due circuiti ausiliari di Fig. 10.18 e Fig. 10.19. In particolare, si veda la (10.144) del § 5. Il doppio bipolo in questo caso si definisce ***doppio bipolo reciproco***.

Il sistema (10.23) si può riscrivere come:

$$\begin{cases} I_1 = G_{11} V_1 + G_m V_2 \\ I_2 = G_m V_1 + G_{22} V_2 \end{cases} \tag{10.31}$$

Un'altra proprietà della matrice **G**, conseguenza della proprietà di non amplificazione delle tensioni (vedi § 7 della lezione 3) è:

$$|G_m| \leq G_{11} \text{ e } |G_m| \leq G_{22} \tag{10.32}$$

Osservazione:

Se abbiamo determinato una matrice caratteristica e ne vogliamo calcolare un'altra (ad esempio abbiamo calcolato la **R** e vogliamo la **G)** dobbiamo utilizzare le formule di inversione delle matrici. Attenzione al fatto che $R_{11} \neq \frac{1}{G_{11}}$!

3.1.3 La caratterizzazione ibrida e le matrici ibride

Che cosa accade quando controlliamo le due porte con una tensione ed una corrente? Abbiamo le cosiddette rappresentazioni ibride. Esse sono due poiché posso alternare alle due porte due diversi tipi di generatore. Le matrici di caratterizzazione le chiameremo **H'** e **H"**.

I caso.

Cominciamo con la configurazione relativa ad **H'**: controlliamo in corrente la prima porta e in tensione la seconda. Quindi mettiamo un generatore di corrente di caratterizzazione al primario e uno di tensione al secondario come in Fig. 10.20. In riferimento a tale figura, possiamo scrivere:

$$\begin{cases} V_1 = \mathrm{H}'_{11} I_1 + \mathrm{H}'_{12} V_2 \\ I_2 = \mathrm{H}'_{21} I_1 + \mathrm{H}'_{22} V_2 \end{cases} \tag{10.33}$$

dove abbiamo introdotto la matrice ibrida **H'**:

$$\mathbf{H'} = \begin{vmatrix} \mathrm{H}'_{11} & \mathrm{H}'_{12} \\ \mathrm{H}'_{21} & \mathrm{H}'_{22} \end{vmatrix} \tag{10.34}$$

che è una delle due matrici di caratterizzazione ibrida di un doppio bipolo.

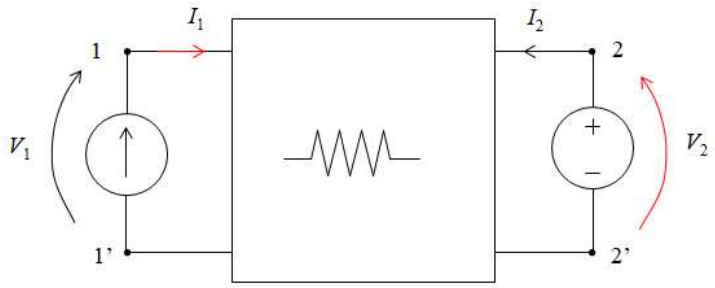


Fig. 10.20 – Caratterizzazione ibrida di un doppio bipolo di resistenze.

I coefficienti della matrice **H'** li possiamo determinare valutando in modo opportuno il rapporto delle grandezze alle due porte. Esaminiamo i vari casi che corrispondono ai vari coefficienti.

Dal sistema (10.33):

$$\mathrm{H}'_{11} = \frac{V_{11}}{I_1} = \frac{V_1}{I_1}\bigg|_{V_2=0} \tag{10.35}$$

dove V_{11} è la tensione alla prima porta quando il generatore della porta secondaria è spento come mostrato nel circuito ausiliare di Fig. 10.21. La H'_{11} è detta ***resistenza propria*** della porta primaria, e rappresenta la resistenza equivalente vista dal generatore di caratterizzazione alla prima porta quando il generatore alla seconda porta è spento.

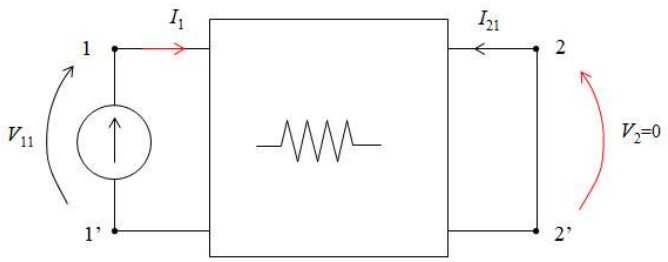


Fig. 10.21 – Circuito ausiliare del circuito di Fig. 10.20 con generatore spento al secondario.

Vediamo la ***conduttanza propria*** alla porta secondaria. Dal sistema (10.33):

$$\mathrm{H}'_{22} = \frac{I_{22}}{V_2} = \frac{I_2}{V_2}\bigg|_{I_1=0} \tag{10.36}$$

dove I_{22} è la corrente alla seconda porta quando il generatore della porta primaria è spento come mostrato nel circuito ausiliare di Fig. 10.22. La H'_{22} è detta ***conduttanza propria*** della porta secondaria, e rappresenta la conduttanza equivalente vista dal generatore di caratterizzazione alla seconda porta quando il generatore alla prima porta è spento.

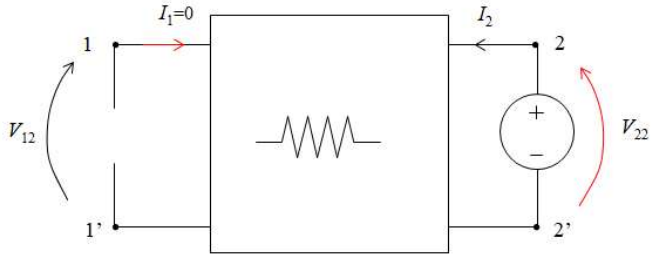


Fig. 10.22 – Circuito ausiliare del circuito di Fig. 10.20 con generatore spento al primario.

I coefficienti nella diagonale secondaria della matrice $\mathbf{H}'$, H'_{12} e H'_{21} saranno:

$$H'_{12} = \frac{V_{12}}{V_2} = \frac{V_1}{V_2}\bigg|_{I_1=0} \quad ; \quad H'_{21} = \frac{I_{21}}{I_1} = \frac{I_2}{I_1}\bigg|_{V_2=0} \tag{10.37}$$

dove V_{12} è la tensione alla prima porta quando il generatore della porta è spento come mostrato nel circuito ausiliare di Fig. 10.22, e dove I_{21} è la corrente alla seconda porta quando il generatore della porta è spento come mostrato nel circuito ausiliare di Fig. 10.21.

I coefficienti sulla diagonale secondaria della matrice non hanno alcuna dimensione fisica, come è facile convincersi dalle (10.37) che sono un rapporto tra grandezze omogenee. Come vedremo tra poco, in virtù del teorema di reciprocità (vedi § 5) i due coefficienti sono opposti tra loro.

La matrice $\mathbf{H}'$ gode di alcune proprietà.

Avendo fatto la convenzione dell'utilizzatore alla prima porta, la resistenza H'_{11} è non negativa ($H'_{11} \geq 0$), analogamente per H'_{22} . Quindi:

$$H'_{11} \geq 0; \quad H'_{22} \geq 0 \tag{10.38}$$

Per quanto riguarda gli elementi nella diagonale secondaria, si dimostra che la matrice $\mathbf{H}'$ è anti−simmetrica cioè:

$$H'_{12} = -H'_{21} = H'_m \tag{10.39}$$

La (10.39) si dimostra grazie al ***teorema di reciprocità,*** enunciato nel § 5, applicato ai due circuiti ausiliari di Fig. 10.21 e Fig. 10.22 che per via del segno si suole definire "di anti-reciprocità". In particolare, si veda la (10.150) del § 5. Il doppio bipolo in questo caso lo diciamo ***doppio bipolo reciproco***.

Un'altra proprietà della matrice $\mathbf{H}'$, conseguenza della proprietà di non amplificazione delle correnti (vedi § 7 della lezione 3) è:

$$\left|H'_m\right| \leq 1 \tag{10.40}$$

Prima di passare all'altro caso riepiloghiamo: H'_{11} ha le dimensioni di Ohm, H'_{22} ha le dimensioni di Siemens, H'_m è adimensionale.

II caso.

Esaminiamo la configurazione relativa ad $\mathbf{H}''$: controlliamo in tensione la prima porta e in corrente la seconda. Quindi mettiamo un generatore di tensione di caratterizzazione al primario e uno di corrente al secondario come in Fig. 10.23. In riferimento a tale figura, possiamo scrivere:

$$\begin{cases} I_1 = H''_{11} V_1 + H''_{12} I_2 \\ V_2 = H''_{21} V_1 + H''_{22} I_2 \end{cases} \tag{10.41}$$

dove abbiamo introdotto la matrice ibrida $\mathbf{H}''$:

$$\mathbf{H}'' = \begin{vmatrix} H''_{11} & H''_{12} \\ H''_{21} & H''_{22} \end{vmatrix} \tag{10.42}$$

che è una delle due matrici di caratterizzazione ibrida di un doppio bipolo.

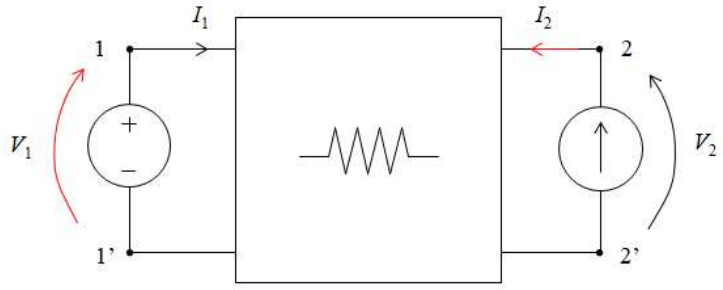


Fig. 10.23 – Caratterizzazione ibrida di un doppio bipolo di resistenze.

I coefficienti della matrice **H"** li possiamo determinare valutando in modo opportuno il rapporto delle grandezze alle due porte. Esaminiamo i vari casi che corrispondono ai vari coefficienti.

Dal sistema (10.41):

$$\mathrm{H}''_{11} = \frac{I_{11}}{V_1} = \frac{I_1}{V_1}\bigg|_{I_2=0} \tag{10.43}$$

dove I_{11} è la corrente alla prima porta quando il generatore della porta secondaria è spento, come mostrato nel circuito ausiliare di Fig. 10.24. La H''_{11} è detta ***conduttanza propria*** della porta primaria, e rappresenta la conduttanza equivalente vista dal generatore di caratterizzazione alla prima porta quando il generatore alla seconda porta è spento.

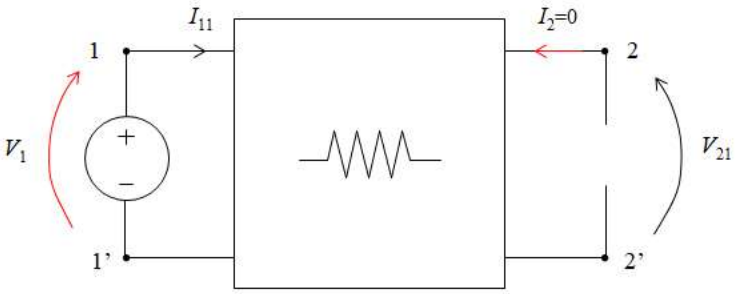


Fig. 10.24 – Circuito ausiliare del circuito di Fig. 10.23 con generatore spento al secondario.

Vediamo la ***resistenza propria*** alla porta secondaria. Dal sistema (10.41):

$$\mathrm{H}''_{22} = \frac{V_{22}}{I_2} = \left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{V_1=0} \tag{10.44}$$

dove V_{22} è la tensione alla seconda porta quando il generatore della porta primaria è spento come mostrato nel circuito ausiliare di Fig. 10.25. La H''_{22} è detta ***resistenza propria*** della porta secondaria, e rappresenta la resistenza equivalente vista dal generatore di caratterizzazione alla seconda porta quando il generatore alla prima porta è spento.

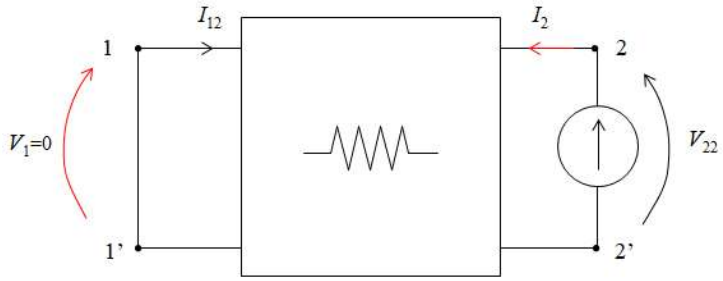


Fig. 10.25 – Circuito ausiliare del circuito di Fig. 10.23 con generatore spento al primario.

I coefficienti nella diagonale secondaria della matrice $\mathbf{H}''$, H''_{12} e H''_{21} saranno:

$$\mathrm{H}''_{12} = \frac{I_{12}}{I_2} = \left.\frac{I_1}{I_2}\right|_{V_1=0} \quad ; \quad \mathrm{H}''_{21} = \frac{V_{21}}{V_1} = \left.\frac{V_2}{V_1}\right|_{I_2=0} \tag{10.45}$$

dove I_{12} è la corrente alla prima porta quando il generatore della porta è spento come mostrato nel circuito ausiliare di Fig. 10.25, e dove V_{21} è la tensione alla seconda porta quando il generatore della porta è spento come mostrato nel circuito ausiliare di Fig. 10.24.

I coefficienti sulla diagonale secondaria della matrice non hanno alcuna dimensione fisica, come è facile convincersi dalle (10.45) che sono un rapporto tra grandezze omogenee. Come vedremo tra poco, in virtù del teorema di reciprocità (vedi § 5) i due coefficienti sono opposti.

La matrice $\mathbf{H}''$ gode di alcune proprietà.

Avendo fatto la convenzione dell'utilizzatore alla prima porta, la resistenza H''_{11} è non negativa ($H''_{11} \geq 0$), analogamente per H''_{22}. Quindi:

$$H''_{11} \geq 0; \quad H''_{22} \geq 0 \tag{10.46}$$

Per quanto riguarda gli elementi nella diagonale secondaria, si dimostra che la matrice $\mathbf{H}''$ è anti–simmetrica cioè:

$$H''_{12} = -H''_{21} = H''_{m} \tag{10.47}$$

La (10.47) si dimostra grazie al ***teorema di reciprocità,*** enunciato nel § 5, applicato ai due circuiti ausiliari di Fig. 10.24 e Fig. 10.25 che per via del segno si suole definire "di anti-reciprocità". In particolare, si veda la (10.151) del § 5. Il doppio bipolo in questo caso lo diciamo ***doppio bipolo reciproco***.

Un'altra proprietà della matrice $\mathbf{H}''$, conseguenza della proprietà di non amplificazione delle correnti (vedi § 7 della lezione 3) è:

$$\left|H''_{m}\right| \leq 1 \tag{10.48}$$

Prima di terminare riepiloghiamo: H''_{11} ha le dimensioni di Siemens, H''_{22} ha le dimensioni di Ohm, H''_{m} è adimensionale.

È possibile dimostrare che esiste un legame tra le due matrici ibride:

$$\mathbf{H}'' = \mathbf{H}'^{-1} \tag{10.49}$$

Le due matrici sono una l'inversa dell'altra.

*3.1.4 La matrice di trasmissione**

Date le quattro grandezze V_1, I_1, V_2 e I_2 abbiamo considerato nei paragrafi precedenti tutti i casi possibili in cui due delle 4 grandezza dipendendo dalle altre due. Manca da esaminare il caso:

- V_1 e I_1 in funzione di V_2 e I_2 (e viceversa).

Ha senso considerare questa possibile combinazione e abbiamo una caratterizzazione del doppio bipolo attraverso la cosiddetta ***matrice di trasmissione***:

$$\begin{cases} V_1 = \mathrm{T}_{11} V_2 + \mathrm{T}_{12}\left(-I_2\right) \\ I_1 = \mathrm{T}_{21} V_2 + \mathrm{T}_{22}\left(-I_2\right) \end{cases} \tag{10.50}$$

Nelle (10.50) si considera la variabile indipendente $-I_2$ in quanto si vuole la convenzione del generatore sul sotto–circuito collegato alla porta secondaria sulle grandezze V_2, $-I_2$ come mostrato in Fig. 10.26. Ciò è dovuto al fatto che questo tipo di caratterizzazione è molto utile nei sistemi che presentano doppi bipoli in cascata[3].

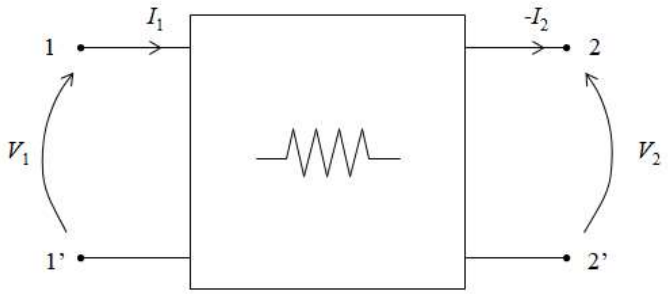


Fig. 10.26 – Doppio bipolo di resistenze per una caratterizzazione con matrice di trasmissione.

In Fig. 10.27 abbiamo considerato due doppi bipoli in cascata e si può notare come corrente $-I_2$ è uguale alla corrente in ingresso I_3 alla porta primaria del doppio bipolo in cascata.

[3] Un esempio di doppi bipolo in cascata è rappresentato dal modello circuitale delle linee di trasporto dell'energia elettrica costituite da tante "celle" RLC in cascata (confronta § 1 della lezione 11).

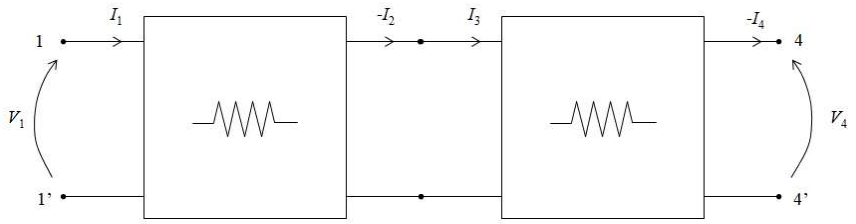


Fig. 10.27 – Due doppi bipolo in cascata.

L'individuazione dei coefficienti della matrice di trasmissione:

$$\mathbf{T} = \begin{vmatrix} \mathrm{T}_{11} & \mathrm{T}_{12} \\ \mathrm{T}_{21} & \mathrm{T}_{22} \end{vmatrix} \tag{10.51}$$

non è possibile effettuarla come abbiamo fatto per le altre matrici di caratterizzazione. In questo caso, infatti, dovremmo controllare alla porta secondaria sia la tensione che la corrente e ciò non è possibile. Pertanto, si utilizzano circuiti ausiliari come quelli rappresentati in Fig. 10.28. Nello specifico scriviamo:

$$\mathrm{T}_{11} = \left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{I_2=0} \quad ; \quad \mathrm{T}_{22} = \left.\frac{I_1}{-I_2}\right|_{V_2=0} \tag{10.52}$$

per i termini sulla diagonale principale. Dove per il calcolo di T_{11} si utilizza il circuito ausiliare (a) della Fig. 10.28, per il calcolo di T_{22} si utilizza il circuito ausiliare (d) della Fig. 10.28. I coefficienti T_{11} e T_{22} sono adimensionali.

Per i termini sulla diagonale secondaria:

$$\mathrm{T}_{12} = \left.\frac{V_1}{-I_2}\right|_{V_2=0} \quad ; \quad \mathrm{T}_{21} = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{I_2=0} \tag{10.53}$$

dove per il calcolo di T_{12} si utilizza il circuito ausiliare (b) della Fig. 10.28, per il calcolo di T_{21} si utilizza il circuito ausiliare (c) della Fig. 10.28. I coefficienti T_{12} e T_{21} hanno dimensioni rispettivamente di una resistenza e di una conduttanza.

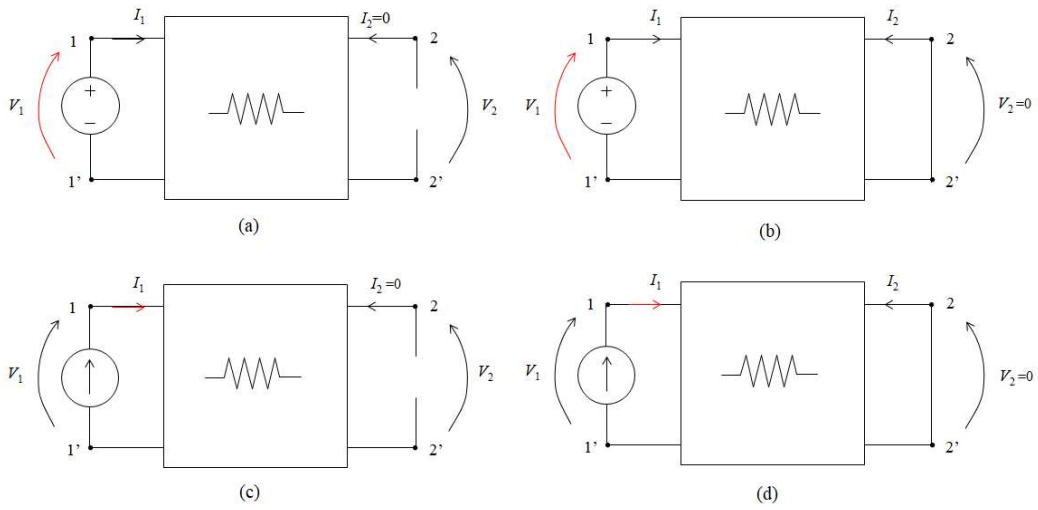


*Fig. 10.28 – Circuiti ausiliari utilizzati per il calcolo dei coefficienti della matrice **T**.*

Le proprietà che hanno i coefficienti sulla diagonale principale della matrice di trasmissione (10.51) sono:

$$|T_{11}| \geq 1; \quad |T_{22}| \geq 1 \tag{10.54}$$

Riguardo i coefficienti sulla diagonale secondaria non sussiste, in questo caso, una proprietà analoga alle (10.21), (10.30), (10.39) o (10.47), valide nel caso delle altre caratterizzazioni. Si noti che, i due coefficienti T_{12} e T_{21} sono dimensionalmente uno l'inverso dell'altro.

Una proprietà che si può dimostrare, se il doppio bipolo gode della proprietà di reciprocità, è quella secondo cui il determinate della matrice di trasmissione risulta:

$$\det[\mathbf{T}] = 1 \tag{10.55}$$

L'aspetto interessante delle matrici di trasmissione è che se abbiamo due doppi bipoli in cascata con matrici $\mathbf{T}'$ e $\mathbf{T}''$, la matrice dell'insieme dei due doppi bipoli, diciamola $\mathbf{T}_{eq}$, è il prodotto delle due matrici: $\mathbf{T}_{eq} = \mathbf{T}'\,\mathbf{T}''$.

3.2 I problemi di analisi

I ***problemi di analisi*** dei doppi bipoli, consistono nel calcolare gli elementi di una delle matrici caratteristiche di un doppio bipolo assegnato. Il modo di procedere per il calcolo degli elementi della matrice si avvale delle definizioni date nei paragrafi precedenti 3.1.1, 3.1.2 e 3.1.3.

La scelta di una caratteristica piuttosto che di un'altra dipende dalla topologia interna del doppio–bipolo. Il criterio può essere quello di scegliere come variabile di controllo ad una porta una tensione o una corrente a seconda che tra i terminali della porta vi sia una resistenza in parallelo o in serie.

Facciamo un esempio: in Fig. 10.29, abbiamo considerato un doppio bipolo assegnato di cui vogliamo trovare una delle possibili caratterizzazioni.

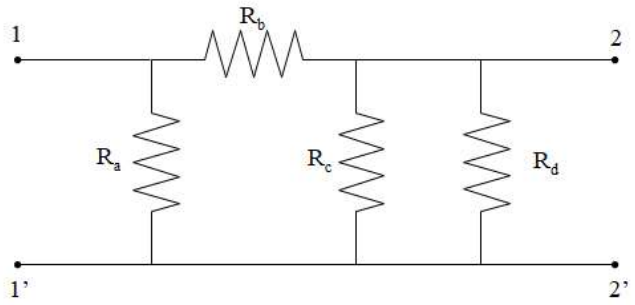


Fig. 10.29 – Doppio bipolo da caratterizzare.

Avendo le due porte con terminali entrambi collegati da una resistenza rispettivamente R_a e R_d, scegliamo di caratterizzare il doppio bipolo con una matrice delle conduttanze e quindi scegliamo le tensioni come variabili di controllo come illustrato in Fig. 10.30.

In questo paragrafo utilizzeremo i simboli maiuscoli per la corrente *I* e per la tensione *V* come abbiamo fatto per circuiti a–dinamici nella Lezione 4.

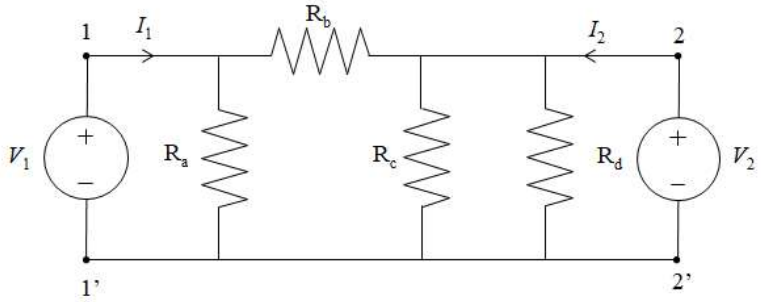


Fig. 10.30 – Scelta delle variabili di controllo alle porte.

Per il calcolo dei parametri della matrice applichiamo le definizioni (10.26), (10.27) e (10.28) del § 3.1.2.

Cominciamo dalla (10.26) e quindi spegniamo il generatore alla porta secondaria e poniamo V_2=0 come abbiamo mostrato in Fig. 10.31. La porta 1-1' vede R_a in parallelo a R_b, pertanto la conduttanza G_{11} sarà:

$$G_{11}=\left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{V_2=0}=\frac{1}{R_a}+\frac{1}{R_b} \tag{10.56}$$

La G_{11} corrisponde alla conduttanza equivalente vista dal generatore di tensione V_1. Notiamo che il generatore di tensione V_2 spento mette in corto circuito la resistenza R_d in parallelo alla R_c; questo è il motivo per il quale conviene utilizzare la matrice delle conduttanze per questa configurazione.

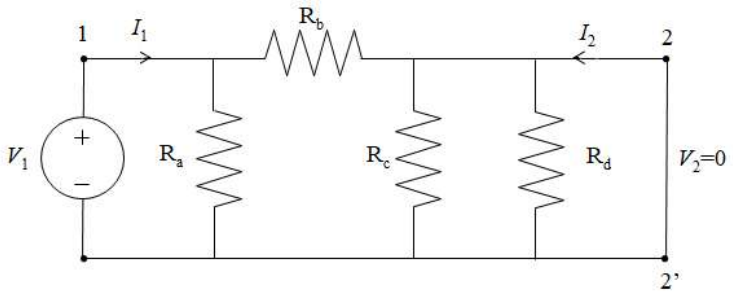


*Fig. 10.31 – Circuito ausiliare per il calcolo dei parametri della matrice **G**.*

Discorso analogo per G_{22} della (10.27). Il generatore spento al primario mette in corto la resistenza R_a e la conduttanza equivalente vista dal generatore al secondario (quando il generatore al primario è spento) è il parallelo di R_b, R_c e R_d, quindi:

$$G_{22}=\left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{V_1=0}=\frac{1}{R_b}+\frac{1}{R_c}+\frac{1}{R_d} \tag{10.57}$$

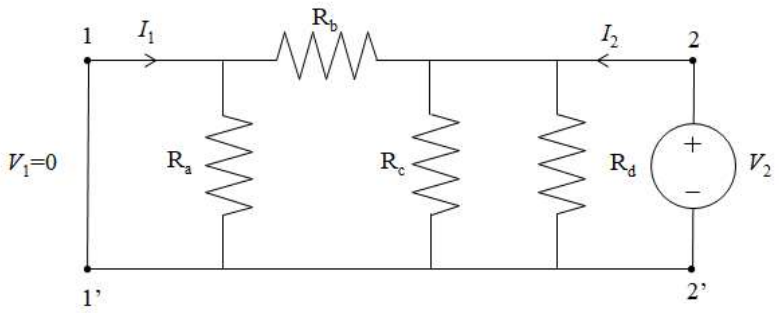


*Fig. 10.32 – Circuito ausiliare per il calcolo dei parametri della matrice **G**.*

Veniamo al calcolo della conduttanza mutua, in generale più complicato. Dobbiamo scegliere una delle due espressioni della (10.28) a seconda di quella che più ci conviene. Guardando le Fig. 10.31 e Fig. 10.32 risulta più conveniente il calcolo di I_2 in funzione di V_1 nella Fig. 10.31, piuttosto che I_1 in funzione di V_2 nella Fig. 10.32. La corrente I_2 in Fig. 10.31, infatti, è quella che attraversa la resistenza R_b essendo R_c e R_d cortocircuitate dal generatore spento al secondario. Essendo nota la tensione su R_b, si ha:

$$G_m=\left.\frac{I_2}{V_1}\right|_{V_2=0}=\left.\frac{\frac{V_1}{R_b}}{V_1}\right|_{V_2=0}=-\frac{1}{R_b} \tag{10.58}$$

Si osservi dalla (10.58) che la conduttanza mutua assume valore negativo. Ciò è possibile in quanto sappiamo che la resistenza e la conduttanza mutua non sono delle vere resistenze e conduttanze, potendo quindi assumere qualsiasi segno.

Nei prossimi paragrafi applicheremo quanto illustrato in questo paragrafo sulla caratterizzazione dei doppi bipoli.

3.2.1 Esercizio con matrice delle resistenze

Vogliamo caratterizzare in corrente il doppio bipolo di Fig. 10.33 e quindi vogliamo calcolare i coefficienti della matrice delle resistenze **R**[4].

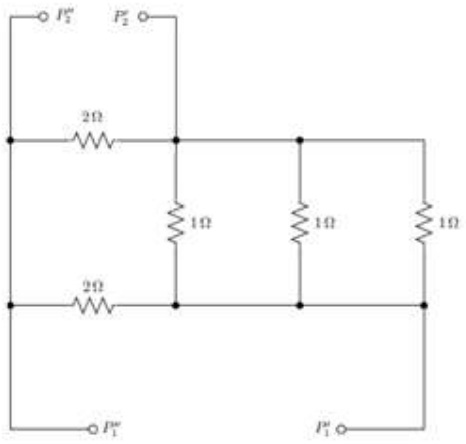


Fig. 10.33 – Doppio bipolo da caratterizzare con matrice delle resistenze.

Si osservi che, nella Fig. 10.33, la porta primaria è indicata da $P_1^{'} - P_1^{''}$ e quella secondaria da $P_2^{'} - P_2^{''}$.

Innanzitutto, per semplificare l'analisi del doppio–bipolo, conviene ridisegnare quello assegnato della Fig. 10.33 in quello della Fig. 10.34. In questo circuito, dobbiamo imporre i seguenti dati:

[4] Questo esercizio e i seguenti sono tratti dalla piattaforma https://autocircuits.org/autocir_home.html realizzata dal prof. Stefano Grivet-Talocia, Politecnico di Torino. È possibile generare altri esercizi risolti utilizzando il sito che prevede varie categorie di esercizi.

DATI: R_{ab}=1/3 Ω, R_{ac}= 2Ω, R_{bc}= 2Ω, inoltre la porta $P_1' - P_1''$ l'abbiamo chiamata 1-1' e la porta $P_2' - P_2''$ l'abbiamo chiamata 2-2'.

Come vedremo nel § 3.3, il doppio bipolo di Fig. 10.34 ha una configurazione cosiddetta a Π. Per tale configurazione, come vedremo, converrebbe utilizzare la matrice delle conduttanze. Nell'esercizio ci viene chiesta quella delle resistenze. Possiamo scegliere tra due strategie risolutive (vedi § 10 della Lezione 4) diverse:

- Calcolo della matrice **G** e poi, invertendola, quello della matrice **R**.
- Calcolo diretto della matrice **R**.

Per esercitarci, scegliamo la seconda opzione nonostante sia la più elaborata.

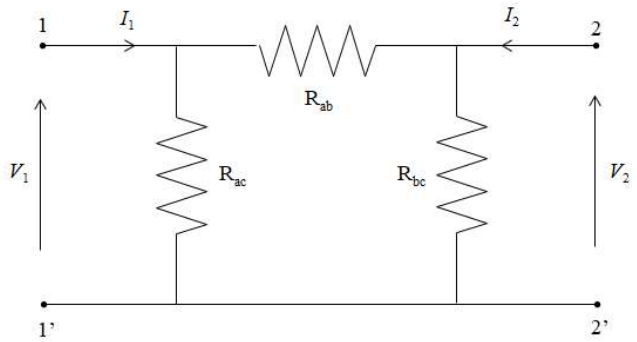


Fig. 10.34 – Circuito di Fig. 10.33 ridisegnato.

Calcoliamo i coefficienti della matrice **R**. Dalla (10.17) si ha:

$$R_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0} = \frac{(R_{ab} + R_{bc})R_{ac}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ac}} = \frac{14}{13}\Omega \qquad (10.59)$$

Dalla (10.18):

$$R_{22} = \left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{I_1=0} = \frac{(R_{ab} + R_{ac})R_{bc}}{R_{ab} + R_{ac} + R_{bc}} = \frac{14}{13}\Omega \qquad (10.60)$$

La resistenza mutua la possiamo calcolare nei due modi della (10.18) in quanto la topologia del doppio bipolo mostra una simmetria e quindi, ad arbitrio, scegliamo la prima espressione delle (10.18):

$$\mathrm{R_m} = \left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{I_1=0} \tag{10.61}$$

Per calcolare la (10.61) calcoliamo la tensione sul resistore $\mathrm{R_{ac}}$ in funzione della corrente I_2:

$$\mathrm{R_m} = \left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{I_1=0} = \frac{\mathrm{R_{ac}}\dfrac{\mathrm{R_{bc}}}{\mathrm{R_{bc}}+\left(\mathrm{R_{ac}}+\mathrm{R_{ab}}\right)}I_2}{I_2} = \frac{12}{13}\Omega \tag{10.62}$$

E infine abbiamo la matrice **R** cercata:

$$\mathbf{R}=\begin{vmatrix}\mathrm{R_{11}} & \mathrm{R_m}\\ \mathrm{R_m} & \mathrm{R_{22}}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\frac{14}{13} & \frac{12}{13}\\ \frac{12}{13} & \frac{14}{13}\end{vmatrix} \tag{10.63}$$

☺

Per esercizio si potrebbe calcolare la matrice **G** e verificare che la sua inversa coincida con la **R** della (10.63).

3.2.2 Esercizio con matrice delle conduttanze

Vogliamo caratterizzare il doppio bipolo di Fig. 10.35 in tensione e quindi vogliamo calcolare i coefficienti della matrice delle conduttanze **G**.

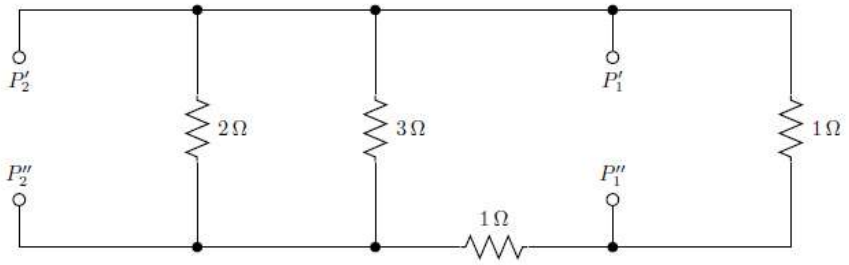


Fig. 10.35 – Doppio bipolo da caratterizzare con matrice delle conduttanze.

Si osservi che, nella Fig. 10.35, la porta primaria è indicata da $P_1^{'} - P_1^{''}$ e quella secondaria da $P_2^{'} - P_2^{''}$.

Innanzitutto, per semplificare l'analisi del doppio−bipolo, conviene ridisegnare quello assegnato della Fig. 10.35 in quello della Fig. 10.36 uguale a quello della Fig. 10.29. In questo circuito, dobbiamo imporre i seguenti dati:

DATI: R_a=1Ω, R_b= 1Ω, R_c= 2Ω, R_d= 3Ω, inoltre la porta $P_1^{'} - P_1^{''}$ l'abbiamo chiamata 1-1' e la porta $P_2^{'} - P_2^{''}$ l'abbiamo chiamata 2-2'. Si osservi che, se nel circuito di Fig. 10.36 consideriamo la resistenza equivalente parallelo tra R_c e R_d, ritroviamo la configurazione a Π che incontreremo nel § 3.3.

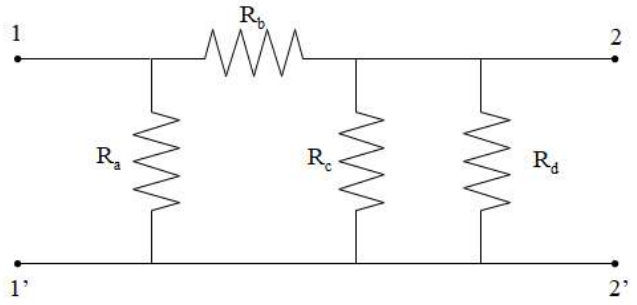


Fig. 10.36 – Circuito di Fig. 10.35 ridisegnato.

Essendo il circuito di Fig. 10.36 uguale a quello della Fig. 10.29, possiamo utilizzare la (10.56):

$$G_{11}=\left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{V_2=0}=\frac{1}{R_a}+\frac{1}{R_b}=2S \tag{10.64}$$

la (10.57):

$$G_{22}=\left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{V_1=0}=\frac{1}{R_b}+\frac{1}{R_c}+\frac{1}{R_d}=\frac{11}{6}S \tag{10.65}$$

e la (10.58):

$$G_m=\left.\frac{I_2}{V_1}\right|_{V_2=0}=\left.\frac{-\frac{V_1}{R_b}}{V_1}\right|_{V_2=0}=-\frac{1}{R_b}=-1S \tag{10.66}$$

E pertanto ricavare la matrice richiesta:

$$\mathbf{G}=\begin{vmatrix} G_{11} & G_m \\ G_m & G_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & \frac{11}{6} \end{vmatrix} \tag{10.67}$$

3.2.3 Esercizio con matrice ibrida

Vogliamo caratterizzare il doppio bipolo di Fig. 10.37 con una matrice ibrida.

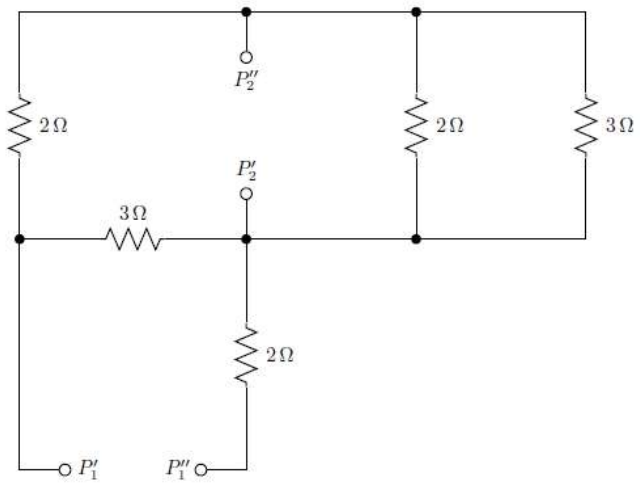


Fig. 10.37 – Doppio bipolo da caratterizzare con matrice ibrida.

Si osservi che, nella Fig. 10.37, la porta primaria è indicata da $P_1^{'} - P_1^{''}$ e quella secondaria da $P_2^{'} - P_2^{''}$.

Innanzitutto, per semplificare l'analisi del doppio–bipolo, conviene ridisegnare quello assegnato della Fig. 10.37 in quello della Fig. 10.38. Nel circuito della nuova figura dobbiamo imporre i seguenti dati:

DATI: R_1=2Ω, R_2= 6/5Ω, R_3= 2Ω, R_4= 3Ω, inoltre la porta $P_1^{'} - P_1^{''}$ l'abbiamo chiamata 1-1' e la porta $P_2^{'} - P_2^{''}$ l'abbiamo chiamata 2-2'. Si osservi che, se nel circuito di Fig. 10.38, consideriamo la resistenza equivalente parallelo tra le due che si trovano all'ingresso della seconda porta.

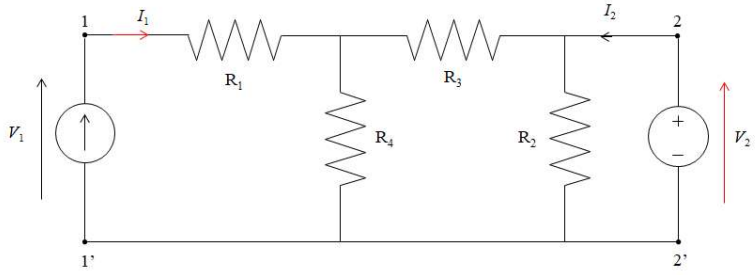


Fig. 10.38 – Circuito di Fig. 10.37 ridisegnato con generatori di caratterizzazioni alle porte.

In riferimento al circuito di Fig. 10.38, dove sono stati considerati i generatori di caratterizzazione, si osserva che è stata fatta la scelta del caso I del § 3.1.3 che riguardava la caratterizzazione con matrici ibride. Per calcolare i coefficienti della matrice ibrida richiesta possiamo utilizzare le (10.35), (10.36) e (10.37).

Dalla (10.35) scriviamo:

$$\mathrm{H}_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{V_2=0} = \mathrm{R}_1 + \frac{\mathrm{R}_3\mathrm{R}_4}{\mathrm{R}_3+\mathrm{R}_4} = 2 + \frac{6}{5} = \frac{16}{5}\Omega \tag{10.68}$$

Dalla (10.36)

$$\mathrm{H}_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{I_1=0} = \frac{1}{\mathrm{R}_3+\mathrm{R}_4} + \frac{1}{\mathrm{R}_2} = \frac{1}{5} + \frac{5}{6} = \frac{31}{30}\mathrm{S} \tag{10.69}$$

E dalle (10.37) scegliamo la seconda espressione:

$$-\mathrm{H}_\mathrm{m} = \mathrm{H}_{21} = \left.\frac{I_2}{I_1}\right|_{V_2=0} = -\frac{\dfrac{\mathrm{R}_4}{\mathrm{R}_3+\mathrm{R}_4} I_1}{I_1} = -\frac{3}{5} \tag{10.70}$$

dove abbiamo utilizzato un partitore di corrente tra le resistenze R_3 e R_4.

Si perviene infine alla matrice richiesta:

$$\mathbf{H}=\begin{vmatrix} H_{11} & H_m \\ -H_m & H_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \frac{16}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{31}{30} \end{vmatrix} \tag{10.71}$$

☺

3.3 I problemi di sintesi

I ***problemi di sintesi*** consistono nel "costruire" un doppio bipolo una volta assegnata la matrice che lo rappresenta.

Avendo a disposizione tre condizioni corrispondenti ai tre coefficienti della matrice caratteristica, realizzeremo il nostro circuito con tre resistenze. Per questa scelta, le configurazioni possibili sono due. Una collega i resistori a stella (vedi Fig. 4.47 della Lezione 4) e l'altra a triangolo (vedi Fig. 4.46 della Lezione 4). Per la configurazione a stella, abbiamo, nell'ambito dei doppi bipoli, la cosiddetta ***configurazione a T*** che abbiamo mostrato in Fig. 10.39**.** Per la configurazione a triangolo abbiamo la cosiddetta ***configurazione a Π*** che abbiamo mostrato in Fig. 10.40.

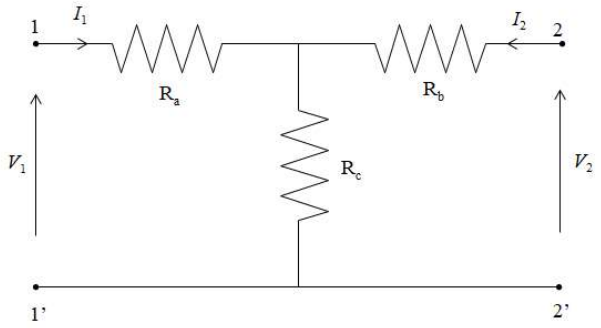


Fig. 10.39 – Configurazione a T .

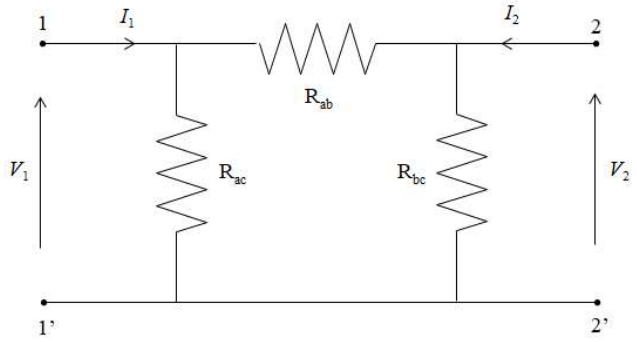


Fig. 10.40 – Configurazione a Π.

Se abbiamo assegnata una matrice di caratterizzazione, possiamo sintetizzare un doppio bipolo scegliendo una delle due configurazioni e utilizzando delle relazioni che legano i coefficienti della matrice alle resistenze della configurazione scelta. Se ci assegnano una matrice delle resistenze converrà scegliere una configurazione a T, poiché questa alimentata con generatori di corrente è tale che quando si spegne un generatore la resistenza in serie della porta interessata non vede passaggio di corrente e quindi non interviene nel calcolo dei coefficienti. Viceversa, se ci assegnano una matrice delle conduttanze conviene una configurazione a Π in quanto questa, alimentata con generatori di tensione, è tale che quando si spegne un generatore la resistenza in parallelo alla porta interessata è messa in corto circuito e quindi non vede passaggio di corrente non intervenendo nel calcolo dei coefficienti.

È facile dimostrare che i coefficienti della matrice delle resistenze sono legati alle resistenze R_a, R_b e R_c della configurazione T nel modo:

$$R_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0} = R_a + R_c \tag{10.72}$$

$$R_{22} = \left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{I_1=0} = R_b + R_c \tag{10.73}$$

$$\mathrm{R_m}=\left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{I_1=0}=\left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0}=\mathrm{R_c} \tag{10.74}$$

È facile dimostrare che i coefficienti della matrice delle conduttanze sono legati alle resistenze R_{ac}, R_{ab} e R_{bc} della configurazione Π nel modo:

$$\mathrm{G_{11}}=\left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{V_2=0}=\frac{1}{\mathrm{R_{ac}}}+\frac{1}{\mathrm{R_{ab}}} \tag{10.75}$$

$$\mathrm{G_{22}}=\left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{V_1=0}=\frac{1}{\mathrm{R_{ab}}}+\frac{1}{\mathrm{R_{bc}}} \tag{10.76}$$

$$\mathrm{G_{21}}=\mathrm{G_{12}}=\mathrm{G_m}=\left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{V_1=0}=\left.\frac{I_2}{V_1}\right|_{V_2=0}=-\frac{1}{\mathrm{R_{ab}}} \tag{10.77}$$

Nel caso ci fosse assegnata una matrice ibrida, possiamo, sempre attraverso calcoli opportuni, trasformare la matrice ibrida in una matrice delle resistenze o delle conduttanze. Ad esempio, dalle (10.33), con $\mathrm{H'_{12}}=-\mathrm{H'_{21}}=\mathrm{H'_m}$, si ha:

$$\begin{cases} V_1=\mathrm{H'_{11}}I_1+\mathrm{H'_m}V_2 \\ I_2=-\mathrm{H'_m}I_1+\mathrm{H'_{22}}V_2 \end{cases} \tag{10.78}$$

E dopo opportune sostituzioni si ottiene:

$$\begin{cases} V_1=\dfrac{\mathrm{H'_{11}H'_{22}}+\mathrm{H'^2_m}}{\mathrm{H'_{22}}}I_1+\dfrac{\mathrm{H'_m}}{\mathrm{H'_{22}}}I_2 \\ V_2=\dfrac{\mathrm{H'_m}}{\mathrm{H'_{22}}}I_1+\dfrac{1}{\mathrm{H'_{22}}}I_2 \end{cases} \tag{10.79}$$

Pertanto, si ottengono le relazioni:

$$R_{11}=\frac{H'_{11}H'_{22}+H'^{2}_{m}}{H'_{22}};\quad R_{22}=\frac{1}{H'_{22}};\quad R_{m}=\frac{H'_{m}}{H'_{22}} \tag{10.80}$$

Ricordiamo infine, dal § 7 della Lezione 4, che una stella può essere equivalente ad un triangolo se tra le rispettive resistenze sussistono opportune relazioni. Sfruttando tali relazioni possiamo determinare il valore delle resistenze R_{ac}, R_{ab} e R_{bc} della configurazione a triangolo (Π) a partire dalle R_a, R_b e R_c della configurazione a stella (T) e viceversa e così trasformare un doppio bipolo con una topologia in uno equivalente con un'altra topologia.

3.3.1 Esercizio

Facciamo un esempio.

Supponiamo di avere la matrice:

$$\mathbf{R}=\begin{vmatrix}10 & 5\\ 5 & 15\end{vmatrix} \tag{10.81}$$

Scegliendo la configurazione a T della Fig. 10.39, si ha:

$$R_{11}=\left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{i_2=0}=R_a+R_c=10\ \Omega \tag{10.82}$$

$$R_{22}=\left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{i_1=0}=R_b+R_c=15\ \Omega \tag{10.83}$$

$$R_m=\left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{i_1=0}=\left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{i_2=0}=R_c=5\ \Omega \tag{10.84}$$

Per calcolare i valori dei parametri basta risolvere il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} R_a + R_c = 10\ \Omega \\ R_b + R_c = 15\ \Omega \\ R_c = 5\ \Omega \end{cases} \tag{10.85}$$

Il risultato sarà: R_a=5 Ω. R_b=10 Ω e R_c=5 Ω.

☺

3.4 I circuiti con doppi bipoli di resistenze

Esaminiamo ora il caso in cui il doppio bipolo è inserito in un circuito come in Fig. 10.6. Come abbiamo descritto nel § 1, a proposito degli N–poli, per risolvere un circuito siffatto è necessario utilizzare le opportune leggi di Kirchhoff, le relazioni caratteristiche del doppio bipolo e le relazioni caratteristiche dei bipoli collegati alle due porte.

L'esercizio che segue mostrerà come procedere.

3.4.1 Esercizio

Vogliamo calcolare la tensione *V* sul resistore R del circuito di Fig. 10.41. Vogliamo utilizzare una caratterizzazione per il doppio bipolo presente nel circuito.

DATI: E=10V, R_e=1 Ω, R= 2Ω, R_1= 3Ω, R_2= 4Ω, R_3= 2Ω, R_4= 3Ω.

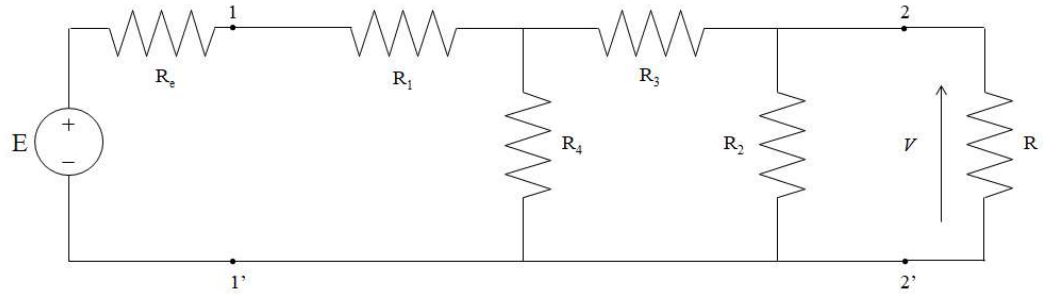


Fig. 10.41 – Circuito con doppio bipolo.

Per risolvere l'esercizio proponiamo la seguente strategia risolutiva:

- Rimuoviamo i bipoli collegati alle due porte del doppio bipolo

- Scegliamo una matrice ibrida per la caratterizzazione del doppio bipolo, come abbiamo fatto per l'esercizio del § 3.2.3,
- Colleghiamo due generatori di caratterizzazione alle due porte come abbiamo mostrato in Fig. 10.42,
- Scriviamo il sistema di equazioni circuitali che include le due equazioni caratteristiche del doppio bipolo,
- Risolviamo il sistema calcolando la grandezza richiesta dal problema che è la tensione sul resistore R, ossia V_2.

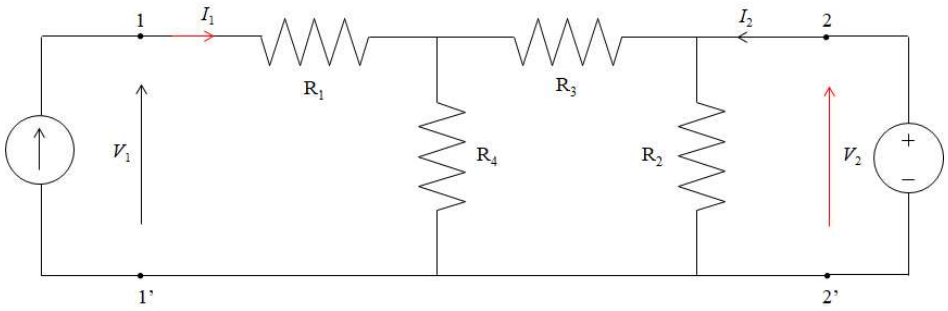


Fig. 10.42 – Doppio bipolo del circuito di Fig. 10.41 con generatori di caratterizzazione.

Per determinare i coefficienti della matrice ibrida possiamo utilizzare le espressioni (10.68), (10.69) e (10.70) dell'esercizio del § 3.2.3.

Dalla (10.68) scriviamo:

$$\mathrm{H}_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{V_2=0} = \mathrm{R}_1 + \frac{\mathrm{R}_3\mathrm{R}_4}{\mathrm{R}_3+\mathrm{R}_4} = 3 + \frac{6}{5} = \frac{21}{5}\Omega \qquad (10.86)$$

Dalla (10.69):

$$\mathrm{H}_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{I_1=0} = \frac{1}{\mathrm{R}_3+\mathrm{R}_4} + \frac{1}{\mathrm{R}_2} = \frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \frac{9}{20}\mathrm{S} \qquad (10.87)$$

E dalla (10.70):

$$\mathrm{H_m} = -\left.\frac{I_2}{I_1}\right|_{V_2=0} = \frac{\frac{\mathrm{R_4}}{\mathrm{R_3}+\mathrm{R_4}} I_1}{I_1} = \frac{3}{5} \tag{10.88}$$

A questo punto, teniamo conto delle relazioni caratteristiche dei bipoli presenti alle porte del doppio bipolo come dalla Fig. 10.41:

$$V_2 = -\mathrm{R}I_2 \tag{10.89}$$

dove abbiamo tenuto conto che la corrente e la tensione sono quelle della porta secondaria del doppio bipolo e che il segno negativo tiene conto del fatto che sul resistore R abbiamo fatto la convenzione del generatore con le grandezze V_2 e I_2.

Per quanto riguarda il generatore reale di tensione presente alla prima porta sia ha:

$$V_1 = \mathrm{E} - \mathrm{R_e} I_1 \tag{10.90}$$

dove abbiamo tenuto conto che la corrente e la tensione sono quelle della porta primaria del doppio bipolo.

Possiamo mettere insieme tutte le equazioni e scrivere il sistema di equazioni circuitali:

$$\begin{cases} V_1 = \mathrm{H_{11}} I_1 + \mathrm{H_m} V_2 \\ I_2 = -\mathrm{H_m} I_1 + \mathrm{H_{22}} V_2 \\ V_1 = \mathrm{E} + V_\mathrm{R} = \mathrm{E} - \mathrm{R_e} I_1 \\ V = V_2 = -\mathrm{R}I_2 \end{cases} \tag{10.91}$$

Che è un sistema di quattro equazioni in quattro incognite.

Nel sistema (10.91), le leggi di Kirchhoff sono presenti in quanto abbiamo utilizzato, per scrivere le relazioni caratteristiche dei bipoli alle porte (le ultime due equazioni), le grandezze V_1 e I_1 alla prima porta, V_2 e I_2 alla seconda porta. Questo è stato possibile utilizzando la LKC ai nodi 1 e 2, e la LKT alle maglie del primario e del secondario.

Sostituendo, alle equazioni (10.91), i valori dei coefficienti:

$$\begin{cases} V_1 = \dfrac{21}{5} I_1 + \dfrac{3}{5} V_2 \\ I_2 = -\dfrac{3}{5} I_1 + \dfrac{9}{20} V_2 \\ V_2 = -2 I_2 \\ V_1 = 10 - I_1 \end{cases} \tag{10.92}$$

Da cui si ottiene quanto richiesto dal problema:

$$V_2 = \frac{120}{106}\,\mathrm{V} \tag{10.93}$$

3.5 La potenza assorbita da un doppio bipolo di resistenze

Un doppio bipolo di resistenze assorbe potenza. In questo paragrafo vogliamo determinare le espressioni della potenza assorbita in relazione a tutti i tipi di caratterizzazione.

Per la caratterizzazione con matrice delle resistenze **R**, partendo dalla relazione (10.14) e dalle equazioni del sistema (10.15) otteniamo la potenza assorbita dal doppio bipolo:

$$\mathrm{p}(t) = v_1(t) i_1(t) + v_2(t) i_2(t) = \mathrm{R}_{11} i_1^2(t) + 2\mathrm{R}_{\mathrm{m}} i_1(t) i_2(t) + \mathrm{R}_{22} i_2^2(t) \tag{10.94}$$

Per la caratterizzazione con matrice delle conduttanze **G**, partendo dalla relazione (10.14) e dalle equazioni del sistema (10.24) otteniamo la potenza assorbita dal doppio bipolo:

$$\mathrm{p}(t) = v_1(t) i_1(t) + v_2(t) i_2(t) = \mathrm{G}_{11} v_1^2(t) + 2\mathrm{G}_{\mathrm{m}} v_1(t) v_2(t) + \mathrm{G}_{22} v_2^2(t) \tag{10.95}$$

Esaminiamo ora le caratterizzazioni con matrice ibrida $\mathbf{H}'$ e $\mathbf{H}''$.

Nel caso della matrice $\mathbf{H}'$, partendo dalla relazione (10.14) e dalle equazioni del sistema (10.33) otteniamo la potenza assorbita dal doppio−bipolo:

$$p(t) = v_1(t)i_1(t)+v_2(t)i_2(t)=H_{11}i_1^2(t) + H_{22}v_2^2(t) \qquad (10.96)$$

Nel caso della matrice $\mathbf{H}^{''}$, partendo dalla relazione (10.14) e dalle equazioni del sistema (10.41) otteniamo la potenza assorbita dal doppio−bipolo:

$$p(t) = v_1(t)i_1(t)+v_2(t)i_2(t)=H_{11}v_1^2(t) + H_{22}i_2^2(t) \qquad (10.97)$$

Osserviamo che:

La potenza assorbita è una somma di termini positivi in quanto abbiamo fatto la convenzione dell'utilizzatore alle due porte del doppio bipolo

L'espressione della potenza assorbita quando utilizziamo una matrice ibrida non dipende dal coefficiente $H_m^{'}$ o $H_m^{''}$ e questo può essere utile, misurando i valori della potenza e della tensione e corrente alle porte, per ottenere il valore dei coefficienti della diagonale principale delle matrici.

4 I doppi bipoli di impedenze

Cosa accade quando all'interno del doppio bipolo di Fig. 10.5, non vi sono solo resistenze, ma anche bipoli dinamici?

È ancora possibile individuare una caratterizzazione del doppio–bipolo, tuttavia le relazioni non saranno più semplicemente di tipo algebrico. Rimane valido, comunque, ciò che abbiamo detto nell'introduzione generale sui doppi bipoli del § 2.

In questa Lezione, nel prossimo § 4.1, ci occuperemo del caso in cui il doppio bipolo si trova in un circuito a regime sinusoidale che può essere studiato nel dominio simbolico come in Fig. 10.43. Vedremo che, utilizzando il metodo simbolico, potremo ragionare in modo analogo a quanto fatto per i doppi bipoli resistivi. Rimane ancora valido, con la dovuta sostituzione di numeri complessi ai numeri reali, quanto detto a proposito dell'analisi (vedi § 3.2) e della sintesi (vedi § 3.3) di doppi bipoli, nonché della potenza assorbita (vedi § 3.5).

4.1 La caratterizzazione di un doppio bipolo di impedenze

Nel caso di regime sinusoidale nel dominio simbolico, si parla di ***doppi bipoli di impedenze*** perché all'interno del sistema considereremo i bipoli descritti con le loro impedenze (o ammettenze). Quindi per caratterizzare un doppio bipolo si introdurrà la ***matrice delle impedenze*** o la ***matrice delle ammettenze*** (corrispondenti a quella delle resistenze e delle conduttanze), le ***matrici ibride*** e la ***matrice di trasmissione***.

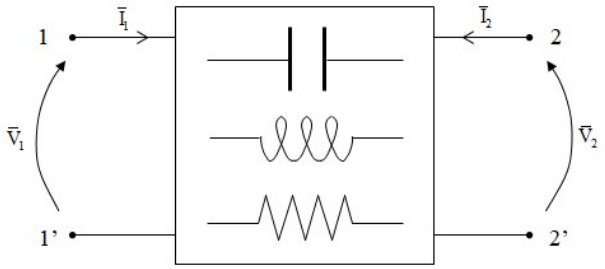


Fig. 10.43 – Doppio bipolo in regime sinusoidale.

4.1.1 La matrice delle impedenze

Per la matrice $\dot{\mathbf{Z}}$, detta ***matrice delle impedenze***, si ragiona in modo analogo a quanto fatto nel § 3.1.1 con la matrice delle resistenze. Consideriamo una caratterizzazione controllata in corrente e, quindi, scriviamo:

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = \dot{Z}_{11}\bar{I}_1 + \dot{Z}_m\bar{I}_2 \\ \bar{V}_2 = \dot{Z}_m\bar{I}_1 + \dot{Z}_{22}\bar{I}_2 \end{cases} \tag{10.98}$$

I coefficienti della matrice sono calcolati come abbiamo fatto per la matrice delle resistenze. I coefficienti di ***impedenza propria***:

$$\dot{Z}_{11} = \left.\frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_1}\right|_{\bar{I}_2=0} \tag{10.99}$$

$$\dot{Z}_{22} = \left.\frac{\bar{V}_2}{\bar{I}_2}\right|_{\bar{I}_1=0} \tag{10.100}$$

I coefficienti di ***impedenza mutua***:

$$\dot{Z}_m = \left.\frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_2}\right|_{\bar{I}_1=0} = \left.\frac{\bar{V}_2}{\bar{I}_1}\right|_{\bar{I}_2=0} \tag{10.101}$$

Osserviamo che la matrice delle impedenze è ancora simmetrica. Il doppio bipolo in questo caso è ancora un ***doppio bipolo reciproco***.

Le altre proprietà introdotte per le matrici dei doppi bipoli di resistenze vengono a cadere in quanto nel dominio simbolico le grandezze sono numeri complessi e quindi è impossibile introdurre una relazione d'ordine. Possiamo solo affermare che la parte reale delle impedenze proprie deve essere non negativa.

4.1.2 La matrice delle ammettenze

Per la matrice $\dot{\mathbf{Y}}$, detta ***matrice delle ammettenze***, si ragiona in modo analogo a quanto fatto nel § 3.1.2 con la matrice delle conduttanze. Consideriamo una caratterizzazione controllata in tensione e, quindi, scriviamo:

$$\begin{cases} \bar{I}_1 = \dot{Y}_{11}\bar{V}_1 + \dot{Y}_m\bar{V}_2 \\ \bar{I}_2 = \dot{Y}_m\bar{V}_1 + \dot{Y}_{22}\bar{V}_2 \end{cases} \tag{10.102}$$

I coefficienti della matrice sono calcolati come abbiamo fatto per la matrice delle conduttanze. I coefficienti di ***ammettenza propria***:

$$\dot{Y}_{11} = \left.\frac{\bar{I}_1}{\bar{V}_1}\right|_{\bar{V}_2=0} \tag{10.103}$$

$$\dot{Y}_{22} = \left.\frac{\bar{I}_2}{\bar{V}_2}\right|_{\bar{V}_1=0} \tag{10.104}$$

I coefficienti di ***ammettenza mutua***:

$$\dot{Y}_m = \left.\frac{\bar{I}_1}{\bar{V}_2}\right|_{\bar{V}_1=0} = \left.\frac{\bar{I}_2}{\bar{V}_1}\right|_{\bar{V}_2=0} \tag{10.105}$$

Osserviamo che la matrice delle ammettenze è ancora simmetrica. Il doppio bipolo in questo caso è ancora un ***doppio bipolo reciproco***.

Le altre proprietà introdotte per le matrici dei doppi bipoli di conduttanze vengono a cadere in quanto nel dominio simbolico le grandezze sono numeri complessi e quindi è impossibile introdurre una relazione d'ordine. Possiamo solo affermare che la parte reale delle ammettenze proprie deve essere non negativa.

4.1.3 Le matrici ibride nel dominio simbolico

Possiamo introdurre le ***matrici ibride*** anche nel dominio dei fasori.

Seguendo la descrizione del § 3.1.3, scegliamo di controllare in corrente la prima porta ed in tensione la seconda e quindi possiamo scrivere:

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = \dot{H}'_{11}\bar{I}_1 + \dot{H}'_m\bar{V}_2 \\ \bar{I}_2 = -\dot{H}'_m\bar{I}_1 + \dot{H}'_{22}\bar{V}_2 \end{cases} \tag{10.106}$$

Dove i coefficienti sono:

$$\dot{H}'_{11} = \left.\frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_1}\right|_{\bar{V}_2=0} \tag{10.107}$$

$$\dot{H}'_{22} = \left.\frac{\bar{I}_2}{\bar{V}_2}\right|_{\bar{I}_1=0} \tag{10.108}$$

$$\dot{H}'_m = \left.\frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_2}\right|_{\bar{I}_1=0} = -\left.\frac{\bar{I}_2}{\bar{I}_1}\right|_{\bar{V}_2=0} \tag{10.109}$$

Scegliamo ora di controllare in tensione la prima porta ed in corrente la seconda, e quindi possiamo scrivere:

$$\begin{cases} \bar{I}_1 = \dot{H}''_{11}\bar{V}_1 + \dot{H}''_m\bar{I}_2 \\ \bar{V}_2 = -\dot{H}''_m\bar{V}_1 + \dot{H}''_{22}\bar{I}_2 \end{cases} \tag{10.110}$$

Dove i coefficienti sono:

$$\dot{H}''_{11} = \left.\frac{\bar{I}_1}{\bar{V}_1}\right|_{\bar{I}_2=0} \tag{10.111}$$

$$\dot{H}''_{22} = \left.\frac{\bar{I}_2}{\bar{V}_2}\right|_{\bar{V}_1=0} \tag{10.112}$$

$$\dot{H}_m^{''} = \left.\frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_2}\right|_{\bar{I}_2=0} = -\left.\frac{\bar{I}_2}{\bar{I}_1}\right|_{\bar{V}_1=0} \tag{10.113}$$

Per entrambe le due matrici ibride osserviamo che la matrice è ancora anti−simmetrica. Il doppio bipolo in questo caso è ancora un ***doppio bipolo reciproco***.

Le altre proprietà introdotte per le matrici ibride dei doppi bipoli vengono a cadere in quanto nel dominio simbolico le grandezze sono numeri complessi e quindi è impossibile introdurre una relazione d'ordine. Possiamo solo affermare che la parte reale dei coefficienti propri deve essere non negativa.

*4.1.4 La matrice di trasmissione nel dominio simbolico**

Per quanto riguarda la ***matrice di trasmissione*** nel dominio simbolico, possiamo scrivere

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = \dot{T}_{11}\bar{V}_2 + \dot{T}_{12}\left(-\bar{I}_2\right) \\ \bar{I}_1 = \dot{T}_{21}\bar{V}_2 + \dot{T}_{22}\left(-\bar{I}_2\right) \end{cases} \tag{10.114}$$

I coefficienti sono:

$$\dot{T}_{11} = \left.\frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_2}\right|_{\bar{I}_2=0} \quad ; \quad \dot{T}_{22} = \left.\frac{\bar{I}_1}{-\bar{I}_2}\right|_{\bar{V}_2=0} \tag{10.115}$$

per i termini sulla diagonale principale.

Per i termini sulla diagonale secondaria:

$$T_{12} = \left.\frac{\bar{V}_1}{-\bar{I}_2}\right|_{\bar{V}_2=0} \quad ; \quad T_{21} = \left.\frac{\bar{I}_1}{\bar{V}_2}\right|_{\bar{I}_2=0} \tag{10.116}$$

Se il doppio bipolo è reciproco si ha:

$$\det\left[\dot{\mathbf{T}}\right] = 1 \tag{10.117}$$

Anche nel caso di matrici di trasmissione nel dominio simbolico, se abbiamo due doppi bipoli in cascata con matrici $\dot{\mathbf{T}}'$ e $\dot{\mathbf{T}}''$, la matrice dell'insieme dei due doppi bipoli, diciamola $\dot{\mathbf{T}}_{eq}$, è il prodotto delle due matrici: $\dot{\mathbf{T}}_{eq} = \dot{\mathbf{T}}' \, \dot{\mathbf{T}}''$.

4.2 I circuiti con doppi bipoli di impedenze

Analogamente al § 3.4, esaminiamo il caso in cui il doppio bipolo di impedenze è inserito in un circuito come in Fig. 10.6.

L'esercizio che segue mostrerà come procedere in questo caso, che è facile intuire, è analogo a quanto fatto nel § 3.4 relativo ai doppi bipoli a-dinamici.

4.2.1 Esercizio con matrice delle impedenze

Calcolare la matrice delle impedenze del doppio bipolo 11'-22' di Fig. 10.44 e poi, utilizzando tale matrice, calcolare la potenza attiva assorbita dalla resistenza R_2.

DATI: $\bar{E} = 10\,j$, R_1=20Ω, R_2=10Ω, C=0.2mF, L=20mH, ω=100rad/s.

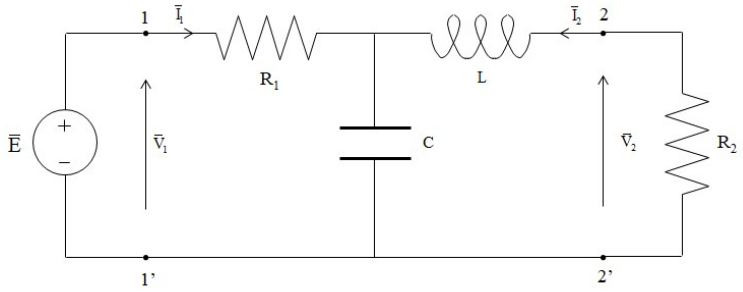


Fig. 10.44 – Circuito con doppio bipolo nel dominio simbolico.

La prima cosa da fare, visto che la traccia ci chiede di calcolare la matrice delle impendenze del doppio bipolo, è scollegare il generatore di tensione alla prima porta e la resistenza R_2 alla seconda porta e caratterizzare il doppio bipolo. Otteniamo dunque, il circuito Fig. 10.45.

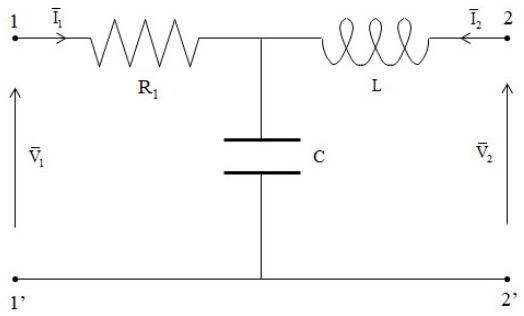


Fig. 10.45 – Doppio bipolo presente nel circuito di Fig. 10.44 da caratterizzare in corrente.

Per determinare gli elementi della matrice delle impedenze dobbiamo utilizzare le (10.99), (10.100) e (10.101). Per far questo alimentiamo il doppio bipolo di Fig. 10.45 con due generatori di corrente come in Fig. 10.46. Infatti, per caratterizzare il doppio bipolo con la matrice delle impedenze è necessario controllare le due porte del doppio bipolo in corrente.

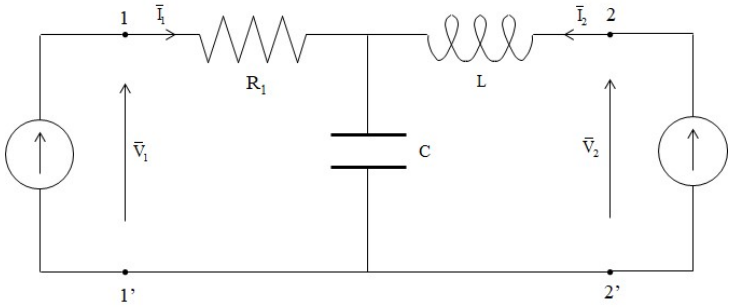


Fig. 10.46 – Doppio bipolo di Fig. 10.45 controllato in corrente.

Calcoliamo i coefficienti della matrice delle impedenze $\dot{Z}$.

Dalla (10.99):

$$\dot{Z}_{11} = \left.\frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_1}\right|_{\bar{I}_2=0} = R_1 + \frac{1}{j\omega C} = 20 - j50 \qquad (10.118)$$

essendo l'induttanza esclusa in quanto non vi è passaggio di corrente.

Calcoliamo ora $\dot{Z}_{22}$ dalla (10.100):

$$\dot{Z}_{22} = \left.\frac{\overline{V}_2}{\overline{I}_2}\right|_{\overline{I}_1=0} = j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = -j48 \tag{10.119}$$

essendo la resistenza esclusa in quanto non vi è passaggio di corrente.

Infine, calcoliamo la $\dot{Z}_m$ utilizzando la prima delle (10.101):

$$\dot{Z}_m = \left.\frac{\overline{V}_1}{\overline{I}_2}\right|_{\overline{I}_1=0} = \frac{1}{j\omega C} = -j50 \tag{10.120}$$

In definitiva, abbiamo calcolato la seguente matrice delle impedenze:

$$\dot{Z} = \begin{vmatrix} 20-j50 & -j50 \\ -j50 & -j48 \end{vmatrix} \tag{10.121}$$

Per calcolare la potenza attiva assorbita dal resistore R_2, colleghiamo nuovamente il generatore di tensione $\overline{E}$ e il resistore R_2 alle due porte come in Fig. 10.44.

La potenza attiva assorbita dal resistore R_2 avrà, come dalla Tabella 9.1 della Lezione 9, la seguente espressione:

$$P = \frac{1}{2} R_2 I_{2M}^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{R_2} V_{2M}^2 \tag{10.122}$$

pertanto, è necessario determinare il modulo della corrente I_{2M} o il modulo della tensione V_{2M} sul resistore R_2. Ragioniamo sulla strategia risolutiva: l'esercizio ci chiede di calcolare la matrice delle impedenze del doppio bipolo e poi la potenza su R_2. Avendo calcolato la matrice ci conviene utilizzare il sistema di equazioni circuitali, come abbiamo fatto nell'esercizio del § 3.4.1. Scriviamo tale sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \overline{V}_1 = \dot{Z}_{11}\overline{I}_1 + \dot{Z}_m\overline{I}_2 \\ \overline{V}_2 = \dot{Z}_m\overline{I}_1 + \dot{Z}_{22}\overline{I}_2 \\ \overline{V}_1 = \overline{E} \\ \overline{V}_2 = -R_2\overline{I}_2 \end{cases} \tag{10.123}$$

Dove analogamente all'esercizio del § 3.4.1, le leggi di Kirchhoff sono presenti in quanto abbiamo utilizzato, per scrivere le relazioni caratteristiche dei bipoli collegati alle porte (le ultime due equazioni), le grandezze $\overline{V}_1$ e $\overline{I}_1$ alla prima porta, $\overline{V}_2$ e $\overline{I}_2$ alla seconda porta. Questo è stato possibile utilizzando la LKC ai nodi 1 e 2, e la LKT alle maglie del primario e del secondario.

Sostituendo nella (10.16) la matrice (10.121), il fasore $\overline{E} = 10\,j$ e R_2:

$$\begin{cases} \overline{V}_1 = (20 - j50)\,\overline{I}_1 - j50\,\overline{I}_2 \\ \overline{V}_2 = -j50\,\overline{I}_1 - j48\,\overline{I}_2 \\ \overline{V}_1 = j10 \\ \overline{V}_2 = 10\overline{I}_2 \end{cases} \tag{10.124}$$

Sostituendo la terza e la quarta equazione nelle prime due otteniamo:

$$\begin{cases} 10\,j = (20 - j50)\,\overline{I}_1 - j50\,\overline{I}_2 \\ 10\hat{I}_2 = -j50\,\overline{I}_1 - j48\,\overline{I}_2 \end{cases} \tag{10.125}$$

da cui:

$$\overline{I}_1 = \frac{10 + j48}{-j50}\,\overline{I}_2, \qquad \overline{I}_2 = \frac{j500}{-460 + j100} = 0.23 - j1.04 \tag{10.126}$$

e quindi:

$$I_{2M} = \sqrt{(0.225)^2 + (1.037)^2} = \sqrt{1.128} \tag{10.127}$$

$$P = \frac{1}{2} R_2 I_{2M}^2 = 5.64\,\text{W} \tag{10.128}$$

La (10.128) è la potenza attiva richiesta.

☺

5 I teoremi di reciprocità

Questo teorema vale per qualsiasi circuito lineare costituito da generatori ideali, resistori, condensatori, induttori e trasformatori (vedremo nella Lezione 11 cosa è un trasformatore). Si tratta di un teorema molto importante, che viene spesso richiamato per dimostrare proprietà matematiche del modello circuitale.

Questo teorema è un "teorema topologico", dipende cioè dalla topologia del circuito piuttosto che dalla natura dei bipoli. La sua dimostrazione si basa, infatti, sul teorema di Tellegen.

Nei doppi bipoli trattati in questa Lezione abbiamo introdotto le proprietà di simmetria delle matrici di caratterizzazione (10.21), (10.30), (10.39), (10.47) e quelle analoghe per i doppi bipoli in regime sinusoidale, in virtù del teorema di reciprocità.

Lo introduciamo per circuiti resistivi perché la dimostrazione, che come vedremo utilizza il teorema di Tellegen, risulta molto agevole in questo caso. Ma si può dimostrare che il teorema vale, in generale, anche in regimi dinamici.

IL teorema di Tellegen si applica al caso di un circuito resistivo passivo che supponiamo sia alimentato da due generici generatori. Consideriamo dunque la Fig. 10.47.

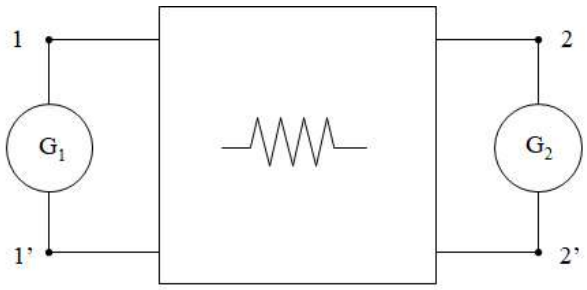


Fig. 10.47 – Circuito di resistenze reciproco.

Il titolo indica una denominazione declinata al plurale perché esistono tre forme per questo teorema a seconda del tipo di generatori G_1 e G_2 considerati nella Fig. 10.47[5]:

[5] Poiché dimostreremo il teorema per un circuito resistivo utilizzeremo le lettere maiuscole per le grandezze.

1) I forma: G_1 e G_2 sono due generatori di tensione E_1 e E_2.
2) II forma: G_1 e G_2 sono due generatori di corrente I_1 e I_2.
3) III forma: G_1 è un generatore di tensione E_1, e G_2 è un generatore di corrente J_2. Ovviamente si possono anche invertire le posizioni dei due generatori.

Nei seguenti paragrafi analizzeremo distintamente le varie forme.

5.1 I forma

I due generatori sono generatori di tensione e quindi consideriamo la Fig. 10.48.

Le due correnti nei lati in cui sono presenti i generatori, I_1 e I_2, possiamo esprimerle come somma di due contributi, ognuno dipendente da un solo generatore. Ciò grazie al principio di sovrapposizione degli effetti, applicabile poiché il circuito è supposto lineare.

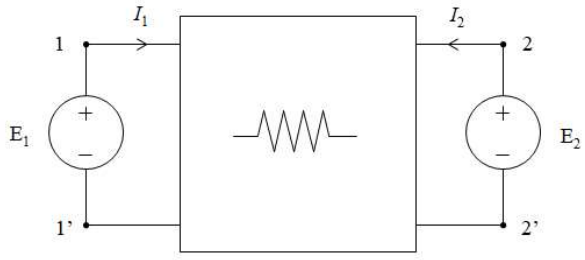


Fig. 10.48 – Circuito usato per la prima forma del teorema di reciprocità.

Applichiamo il principio di sovrapposizione degli effetti e lasciamo lavorare un generatore alla volta come abbiamo rappresentato in Fig. 10.49. Per la sovrapposizione degli effetti, la corrente in ognuno dei due lati dei generatori è la sovrapposizione di due termini, ognuno dovuto ad uno dei due generatori funzionante da solo.

Si ha alla porta primaria:

$$I_1 = I_{11} + I_{12} \tag{10.129}$$

dove:

$$I_{11} = I_1\big|_{E_2=0} \text{ e } I_{12} = I_1\big|_{E_1=0} \tag{10.130}$$

E alla porta secondaria:

$$I_2 = I_{21} + I_{22} \tag{10.131}$$

dove:

$$I_{21} = I_2\big|_{E_2=0} \text{ e } I_{22} = I_2\big|_{E_1==0} \tag{10.132}$$

Il teorema afferma che il rapporto tra effetto (la corrente nel lato del generatore spento I_{21}) e causa (il generatore E_1) nel circuito (a) di Fig. 10.49, è uguale al rapporto tra effetto (la corrente nel lato del generatore spento I_{12}) e causa (il generatore E_2) nel circuito (b) di Fig. 10.49. Si ha in formule:

$$\left.\frac{I_2}{E_1}\right|_{E_2=0} = \left.\frac{I_1}{E_2}\right|_{E_1=0} \Rightarrow \frac{I_{21}}{E_1} = \frac{I_{12}}{E_2} \tag{10.133}$$

Il teorema introduce una "simmetria" tra causa ed effetto. Questa simmetria dipende dal fatto che causa ed effetto sono poste alternativamente nei medesimi lati.

Si osservi che nella prima forma il rapporto effetto/causa considerato nella (10.133) ha le dimensioni di una conduttanza.

La (10.133) serve a dimostrare la simmetria della matrice delle conduttanze, che caratterizza un doppio bipolo, introdotta nel § 3.1.1. Vedi la (10.30) dove, se sostituiamo la (10.28), ritroviamo la (10.133).

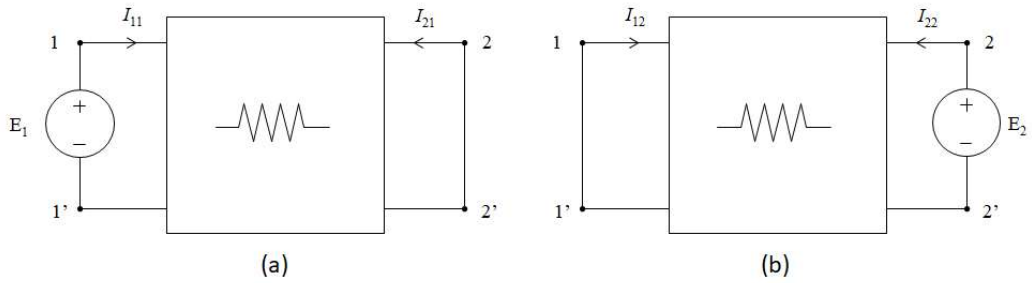


Fig. 10.49 – Sovrapposizione degli effetti per il circuito di Fig. 10.48.

Dimostrazione

Consideriamo, a tale scopo, i due circuiti di Fig. 10.49. Avendo la stessa configurazione topologica, possiamo applicare il teorema di Tellegen (vedi § 8 della Lezione 3). Consideriamo il prodotto delle correnti del circuito (a) per le tensioni del circuito (b). Le correnti del circuito (a) le indichiamo con il pedice i_1, dove il numero 1 ricorda che in tale circuito agisce solo il generatore E_1; le tensioni del circuito (b) le indichiamo con il pedice i_2, dove il numero 2 ricorda che in tale circuito agisce solo il generatore E_2.

Possiamo scrivere:

$$\sum_{i=1}^{l} I_{i1} V_{i2} = 0 \qquad (10.134)$$

Consideriamo poi il prodotto delle correnti del circuito (b) per le tensioni del circuito (a), dove la logica dei pedici è invertita. Possiamo scrivere:

$$\sum_{i=1}^{l} I_{i2} V_{i1} = 0 \qquad (10.135)$$

Osserviamo che, avendo fatto la convenzione del generatore sui lati dove sono posti i generatori, ed avendo sommato tutti i prodotti nella (10.134) e nella (10.135), vorrà dire che stiamo sommando tutte potenze virtuali erogate.

Ora possiamo eguagliare l'espressione al primo membro delle (10.134) e (10.135) essendo entrambe nulle per il teorema di Tellegen:

$$\sum_{i=1}^{l} I_{i1} V_{i2} = \sum_{i=1}^{l} I_{i2} V_{i1} \tag{10.136}$$

Nelle sommatorie della (10.136) possiamo mettere in evidenza i termini relativi ai lati dove sono posti i generatori. Avremo:

$$I_{11} V_{12} + I_{21} V_{22} + \sum_{i=3}^{l} I_{i1} V_{i2} = I_{12} V_{11} + I_{22} V_{21} + \sum_{i=3}^{l} I_{i2} V_{i1} \tag{10.137}$$

Nella (10.137) possiamo osservare che, le sommatorie sono uguali perché i circuiti abbiamo supposto siano uguali tranne che per i lati dove abbiamo posto i due generatori. In altre parole, la parte resistiva dei due circuiti è uguale. Possiamo infatti scrivere, per la sommatoria al primo membro della (10.137):

$$\sum_{i=3}^{l} I_{i1} V_{i2} = -\sum_{i=3}^{l} I_{i1} \mathrm{R}_i I_{i2} = -\sum_{i=3}^{l} \mathrm{R}_i I_{i1} I_{i2} \tag{10.138}$$

e per la sommatoria al secondo membro della (10.137):

$$\sum_{i=3}^{l} I_{i2} V_{i1} = -\sum_{i=3}^{l} I_{i2} \mathrm{R}_i I_{i1} = -\sum_{i=3}^{l} \mathrm{R}_i I_{i1} I_{i2} \tag{10.139}$$

I segni negativi presenti nelle eguaglianze (10.138) e (10.139) sono dovuti al fatto che sui bipoli ho fatto la convenzione del generatore e quindi quando sostituiamo la relazione caratteristica del resistore dobbiamo includere un segno negativo.

La (10.138) e la (10.139) sono uguali e quindi possiamo eliminarle dalla (10.137). Considerando poi che: $V_{12} = 0$, $V_{22} = \mathrm{E}_2$, $V_{11} = \mathrm{E}_1$, $V_{21} = 0$ e sostituendo tali valori nella (10.137), otteniamo la (10.133) che è quanto volevamo dimostrare!

😉

5.2 II forma

Questa volta i due generatori sono generatori di corrente. Consideriamo pertanto la Fig. 10.50.

Le due tensioni nei lati in cui sono presenti i generatori di corrente possiamo esprimerle come somma di due contributi, ognuno dipendente da un solo generatore. Applichiamo il principio di sovrapposizione degli effetti, essendo il circuito lineare, e lasciamo lavorare un generatore alla volta come mostrato in Fig. 10.51.

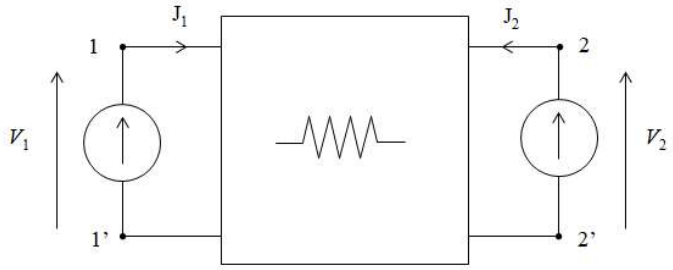


Fig. 10.50 – Circuito usato per la seconda forma del teorema di reciprocità.

Scriviamo le relazioni della sovrapposizione degli effetti per le tensioni sui lati dove sono presenti i generatori:

$$V_1 = V_{11} + V_{12} \tag{10.140}$$

dove:

$$V_{11} = V_1\big|_{J_2=0} \text{ e } V_{12} = V_1\big|_{J_1=0} \tag{10.141}$$

e

$$V_2 = V_{21} + V_{22} \tag{10.142}$$

dove

$$V_{21} = V_2\big|_{J_2=0} \text{ e } V_{22} = V_2\big|_{J_1=0} \tag{10.143}$$

In questo caso quindi il teorema afferma che:

$$\left.\frac{V_1}{\mathrm{J}_2}\right|_{\mathrm{J}_1=0} = \left.\frac{V_2}{\mathrm{J}_1}\right|_{\mathrm{J}_2=0} \Rightarrow \frac{V_{12}}{\mathrm{J}_2} = \frac{V_{21}}{\mathrm{J}_1} \tag{10.144}$$

Il teorema introduce anche in questo caso una "simmetria" tra causa ed effetto.

La (10.144) serve a dimostrare la simmetria della matrice delle resistenze, che caratterizza un doppio bipolo, introdotta nel § 3.1.1. Vedi la (10.21) dove, se sostituiamo la (10.19), ritroviamo la (10.144).

Si osservi che nella seconda forma il rapporto effetto/causa considerato nella (10.144) ha le dimensioni di una resistenza.

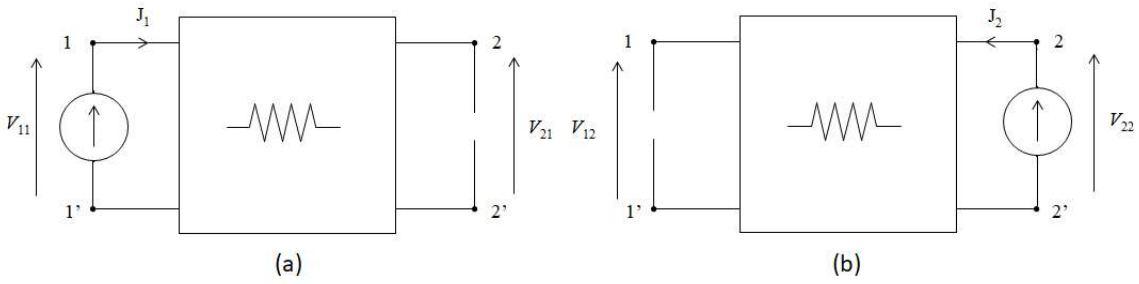


Fig. 10.51 – Sovrapposizione degli effetti per il circuito di Fig. 10.50.

Dimostrazione

Per dimostrare la (10.144) partiamo dalla (10.137), che vale in generale indipendentemente dalle forme del teorema:

$$I_{11}V_{12} + I_{21}V_{22} + \sum_{i=3}^{l} I_{i1}V_{i2} = I_{12}V_{11} + I_{22}V_{21} + \sum_{i=3}^{l} I_{i2}V_{i1} \tag{10.145}$$

Anche in questo caso nella (10.145) possiamo osservare che le due sommatorie sono uguali e pertanto possiamo eliminarle. Inoltre, notando che $I_{11} = \mathrm{J}_1$, $I_{21} = 0$, $I_{12} = 0$, $I_{22} = \mathrm{J}_2$, e sostituendo tali valori nella (10.145) abbiamo dimostrato il teorema!

😉

5.3 III forma

I due generatori sono uno di tensione e l'altro di corrente[6]. Consideriamo pertanto la Fig. 10.52.

Procediamo in modo del tutto analogo a quanto fatto per la I e II forma.

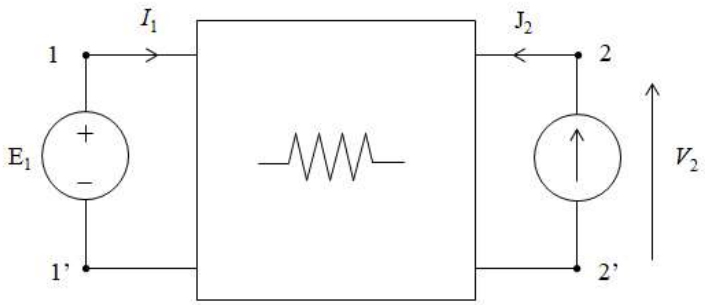


Fig. 10.52 – Circuito usato per la terza forma del teorema di reciprocità.

Questa volta le cause sono un generatore di tensione al lato 1 e un generatore di corrente al lato 2, mentre gli effetti da considerare sono rispettivamente la corrente al lato 1 e la tensione al lato 2.

Usiamo il principio di sovrapposizione degli effetti e quindi facciamo riferimento alla

Scriviamo dunque riguardo al lato del generatore di tensione:

$$I_1 = I_{11} + I_{12} \tag{10.146}$$

dove:

$$I_{11} = I_1\big|_{J=0} \text{ e } I_{12} = I_1\big|_{E=0} \tag{10.147}$$

Riguardo al lato del generatore di corrente:

$$V_2 = V_{21} + V_{22} \tag{10.148}$$

[6] Come abbiamo già anticipato, la posizione dei due generatori si può invertire.

dove

$$V_{21} = V_2\big|_{J=0} \text{ e } V_{22} = V_2\big|_{E=0} \tag{10.149}$$

Nella III forma, il teorema offre una formula che presenta un segno negativo. Si ha infatti:

$$\frac{I_{12}}{J_2} = -\frac{V_{21}}{E_1} \tag{10.150}$$

Nel caso in cui avessimo considerato i generatori invertiti nei due lati avremmo ottenuto:

$$\frac{V_{12}}{E_2} = -\frac{I_{21}}{J_1} \tag{10.151}$$

Il teorema introduce ancora una "simmetria" tra causa ed effetto come detto per le altre forme.

La (10.150) (o la (10.151)) serve a dimostrare la simmetria della matrice ibrida **H'** (o la **H"**), che caratterizza un doppio bipolo, introdotta nel § 3.1.3. Vedi la (10.39) (o la (10.47)) dove, se sostituiamo la (10.37) (o la (10.45)), ritroviamo la (10.150) (o la (10.151)).

Osserviamo che il rapporto effetto/causa della (10.150) e della (10.151) sono adimensionali. Inoltre, notiamo la presenza del segno meno.

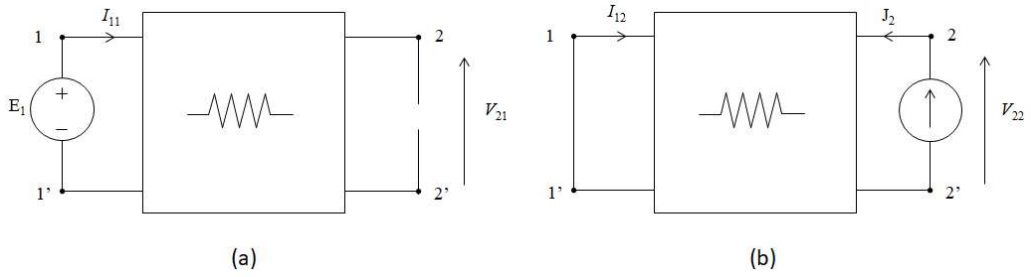


Fig. 10.53 – Sovrapposizione degli effetti per il circuito di Fig. 10.52.

Dimostrazione

Dimostriamo la (10.150). Partiamo sempre dalla (10.137) che vale in generale indipendentemente dalle forme del teorema:

$$I_{11}V_{12} + I_{21}V_{22} + \sum_{i=3}^{l} I_{i1}V_{i2} = I_{12}V_{11} + I_{22}V_{21} + \sum_{i=3}^{l} I_{i2}V_{i1} \qquad (10.152)$$

Come abbiamo fatto nella I e II forma, consideriamo il fatto che le sommatorie presenti nella (10.152) son uguali e quindi eliminabili, inoltre essendo: $V_{12} = 0$, $I_{21} = 0$, $V_{11} = \mathrm{E}_1$, $I_{22} = \mathrm{J}_2$ si ottiene la (10.150) e il teorema è dimostrato!

😉

La forma duale, e quindi la formula (10.151), è possibile dimostrarla in maniera analoga e lasciamo il procedimento da sviluppare per esercizio.

6 I generatori controllati*

Abbiamo introdotto nella Lezione 2 i generatori ideali indipendenti di tensione e di corrente (vedi § 1.4 della Lezione 2). Questi si chiamano generatori "indipendenti" perché sono in grado di erogare rispettivamente una tensione ed una corrente assegnata indipendentemente dal circuito in cui sono inseriti. Esistono invece generatori che erogano una tensione o una corrente che dipende da una grandezza del circuito: questi sono i ***generatori controllati*** di tensione e corrente. I generatori controllati possono essere realizzati con transistori o con amplificatori operazionali. Inoltre, è utile ricordare che i generatori controllati sono spesso utilizzati come modelli lineari per i transistori ed altri dispositivi.

I generatori controllati sono dei particolari doppi bipoli che ad una porta si comportano come dei generatori che erogano una grandezza elettrica dipendente dal valore di una delle grandezze elettrica dell'altra porta. In linea generale i generatori controllati possono essere sia lineari che non lineari. Noi studieremo quelli lineari. Nei ***generatori controllati*** lineari una delle due grandezze – tensione o corrente – ad una delle due porte è direttamente proporzionale ad una delle due grandezze – tensione o corrente – all'altra porta. Per convenzione, la porta che funziona da "generatore" è la porta 2-2' e la porta che "controlla" il generatore è la porta 1-1'. Considerando tutte le possibili combinazioni vediamo nei prossimi paragrafi uno alla volta i singoli casi.

Osserviamo che l'insieme dei quattro generatori controllati che abbiamo definito è in realtà sovrabbondante. Come vedremo con il seguente esempio, infatti, essi non sono in realtà tutti indipendenti fra di loro. In particolare, da due di essi è possibile ricavare gli altri due e viceversa. Se ad esempio, consideriamo la serie tra un generatore di tensione controllato in corrente ed uno di corrente controllato in tensione, è facile constatare che complessivamente si ottiene un generatore di corrente controllato in corrente.

6.1 Il generatore di tensione controllato in tensione

Il ***generatore di tensione controllato in tensione*** è un doppio bipolo definito dalle relazioni caratteristiche:

$$i_1(t) = 0, \quad v_2(t) = \alpha v_1(t) \tag{10.153}$$

dove α è una costante adimensionale detta ***rapporto di trasferimento di tensione***.

Il simbolo del generatore controllato definito dalla (10.153) è riportato in Fig. 10.54. La porta 1-1' è equivalente ad un circuito aperto e la porta 2-2' è equivalente ad un generatore ideale di tensione che impone una tensione proporzionale alla tensione della porta 1-1'.

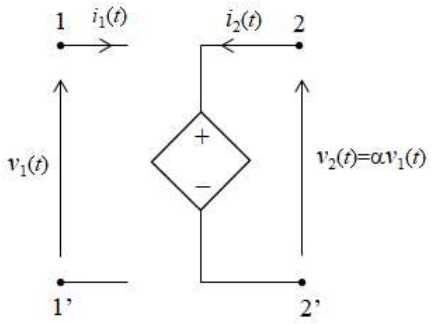


Fig. 10.54 – Simbolo di un generatore di tensione controllato in tensione.

6.2 Il generatore di tensione controllato in corrente

Il ***generatore di tensione controllato in corrente*** è un doppio bipolo definito dalle relazioni caratteristiche:

$$v_1(t) = 0, \; v_2(t) = r v_1(t) \tag{10.154}$$

dove r è una costante, che prende il nome di ***trans-resistenza*** del generatore controllato; r si misura in ohm. Il simbolo di questo generatore controllato è riportato in Fig. 10.55. La porta 1-1' è equivalente ad un corto circuito e la porta 2-2' è equivalente ad un generatore ideale di tensione che impone una tensione proporzionale alla corrente che attraversa la porta 1-1'.

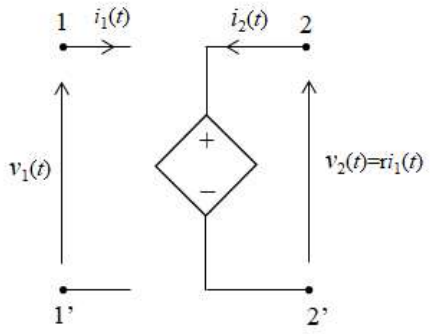


Fig. 10.55 – Simbolo di un generatore di tensione controllato in corrente.

6.3 Il generatore di corrente controllato in tensione

Il ***generatore di corrente controllato in tensione*** è un doppio bipolo definito dalle relazioni caratteristiche:

$$i_1(t) = 0,\ i_2(t) = g v_1(t) \tag{10.155}$$

dove g è una costante, che prende il nome di ***trans-conduttanza***; *g* si misura in siemens. Il simbolo di questo generatore controllato è riportato in Fig. 10.56. La porta 1-1' è equivalente ad un circuito aperto e la porta 2-2' è equivalente ad un generatore di corrente ideale che impone una corrente proporzionale alla tensione della porta 1-1'.

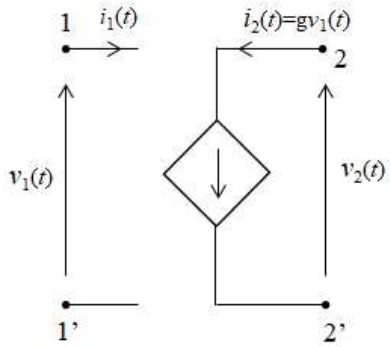


Fig. 10.56 – Simbolo di un generatore di corrente controllato in tensione.

6.4 Il generatore di corrente controllato in corrente

Il ***generatore di corrente controllato in corrente*** è un doppio bipolo lineare definito dalle relazioni caratteristiche:

$$v_1(t) = 0,\ i_2(t) = \beta i_1(t) \qquad (10.156)$$

dove β è una costante adimensionale, che prende il nome di ***rapporto di trasferimento di corrente***. Il simbolo di questo generatore controllato è riportato in Fig. 10.57. La porta 1-1' è equivalente ad un corto circuito e la porta 2-2' è equivalente ad un generatore ideale di corrente che impone una corrente proporzionale alla corrente che circola nella porta 1-1'.

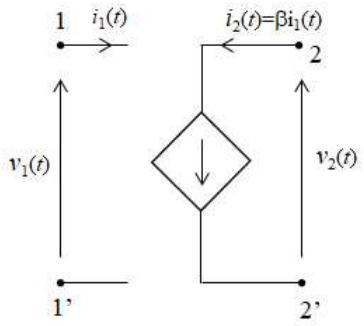


Fig. 10.57 – Simbolo di un generatore di corrente controllato in corrente.

Considerazioni

Ci domandiamo a questo punto: si può utilizzare il principio di sovrapposizione degli effetti in circuiti con generatori controllati?

Ai circuiti con generatori controllati lineari (come quelli che abbiamo introdotto), resistori lineari e generatori indipendenti è possibile applicare la sovrapposizione degli effetti. La sovrapposizione va applicata sommando gli effetti dei soli generatori indipendenti e mai spegnendo quelli controllati che non figurano tra i termini noti delle equazioni lineari che descrivono il circuito.

La potenza elettrica assorbita da un generatore controllato è uguale a quella assorbita dalla porta 2-2': infatti, la potenza assorbita dalla porta 1-1' è, in qualsiasi condizione di funzionamento, uguale a zero. Siccome la porta 2-2' si comporta come se fosse un generatore ideale, la potenza da essa assorbita può risultare anche negativa. Di conseguenza, la potenza elettrica assorbita dai generatori controllati può essere anche negativa, quindi i generatori controllati sono dei ***doppi bipoli attivi***. In conseguenza di ciò, tra l'altro, per i circuiti che contengono generatori controllati non vale la proprietà della non amplificazione delle tensioni e delle correnti.

Indice delle figure

Fig. 10.1 – Rappresentazione di un generico 3–polo. 4

Fig. 10.2 – 3–polo inserito in un circuito. 6

Fig. 10.3 – Un 4-polo. 7

Fig. 10.4 – Un 4-polo che soddisfa le condizioni di porta per essere un doppio bipolo… 8

Fig. 10.5 – Un doppio bipolo. 8

Fig. 10.6 – Doppio bipolo a–dinamico terminato con due bipoli alle porte. 9

Fig. 10.7 – Circuito con un 4-polo a–dinamico che non realizza un doppio bipolo 9

Fig. 10.8 – Grafo di un doppio bipolo 10

Fig. 10.9 – Doppio bipolo controllato in corrente 12

Fig. 10.10 – Doppio bipolo controllato in tensione. 12

Fig. 10.11 – Doppio bipolo controllato in maniera ibrida. 13

Fig. 10.12 – Doppio bipolo controllato in maniera ibrida. 13

Fig. 10.13 – Doppio bipolo di resistenze. 15

Fig. 10.14 – Caratterizzazione in corrente di un doppio bipolo di resistenze. 16

Fig. 10.15 – Circuito ausiliare del circuito di Fig. 10.14 con generatore spento al secondario. 17

Fig. 10.16 – Circuito ausiliare del circuito di Fig. 10.14 con generatore spento al primario. 18

Fig. 10.17 – Caratterizzazione in tensione di un doppio bipolo di conduttanze. 20

Fig. 10.18 – Circuito ausiliare del circuito di Fig. 10.17 con generatore spento al secondario. 20

Fig. 10.19 – Circuito ausiliare del circuito di Fig. 10.17 con generatore spento al primario. 21

Fig. 10.20 – Caratterizzazione ibrida di un doppio bipolo di resistenze. 23

Fig. 10.21 – Circuito ausiliare del circuito di Fig. 10.20 con generatore spento al secondario. 24

Fig. 10.22 – Circuito ausiliare del circuito di Fig. 10.20 con generatore spento al primario. 25

Fig. 10.23 – Caratterizzazione ibrida di un doppio bipolo di resistenze. 27

Fig. 10.24 – Circuito ausiliare del circuito di Fig. 10.23 con generatore spento al secondario. 27

Fig. 10.25 – Circuito ausiliare del circuito di Fig. 10.23 con generatore spento al primario. 28

Fig. 10.26 – Doppio bipolo di resistenze per una caratterizzazione con matrice di trasmissione 30

Fig. 10.27 – Due doppi bipolo in cascata. 31

Fig. 10.28 – Circuiti ausiliari utilizzati per il calcolo dei coefficienti della matrice **T** ... 32

Fig. 10.29 – Doppio bipolo da caratterizzare. 33

Fig. 10.30 – Scelta delle variabili di controllo alle porte. 34

Fig. 10.31 – Circuito ausiliare per il calcolo dei parametri della matrice **G**. 34

Fig. 10.32 – Circuito ausiliare per il calcolo dei parametri della matrice **G**. 35

Fig. 10.33 – Doppio bipolo da caratterizzare con matrice delle resistenze. 36

Fig. 10.34 – Circuito di Fig. 10.33 ridisegnato. 37

Fig. 10.35 – Doppio bipolo da caratterizzare con matrice delle conduttanze. 39

Fig. 10.36 – Circuito di Fig. 10.35 ridisegnato. 39

Fig. 10.37 – Doppio bipolo da caratterizzare con matrice ibrida. 41

Fig. 10.38 – Circuito di Fig. 10.37 ridisegnato con generatori di caratterizzazioni alle porte. 42

Fig. 10.39 – Configurazione a T 43

Fig. 10.40 – Configurazione a Π. 44

Fig. 10.41 – Circuito con doppio bipolo. 47

Fig. 10.42 – Doppio bipolo del circuito di Fig. 10.41 con generatori di caratterizzazione. 48

Fig. 10.43 – Doppio bipolo in regime sinusoidale. 52

Fig. 10.44 – Circuito con doppio bipolo nel dominio simbolico. 57

Fig. 10.45 – Doppio bipolo presente nel circuito di Fig. 10.44 da caratterizzare in corrente. 58

Fig. 10.46 – Doppio bipolo di Fig. 10.45 controllato in corrente. 58

Fig. 10.47 – Circuito di resistenze reciproco. 61

Fig. 10.48 – Circuito usato per la prima forma del teorema di reciprocità. 62

Fig. 10.49 – Sovrapposizione degli effetti per il circuito di Fig. 10.48. 64

Fig. 10.50 – Circuito usato per la seconda forma del teorema di reciprocità. 66

Fig. 10.51 – Sovrapposizione degli effetti per il circuito di Fig. 10.50. 67

Fig. 10.52 – Circuito usato per la terza forma del teorema di reciprocità. 68

Fig. 10.53 – Sovrapposizione degli effetti per il circuito di Fig. 10.52. 69

Fig. 10.54 – Simbolo di un generatore di tensione controllato in tensione..... 72

Fig. 10.55 – Simbolo di un generatore di tensione controllato in corrente. 73

Fig. 10.56 – Simbolo di un generatore di corrente controllato in tensione. 73

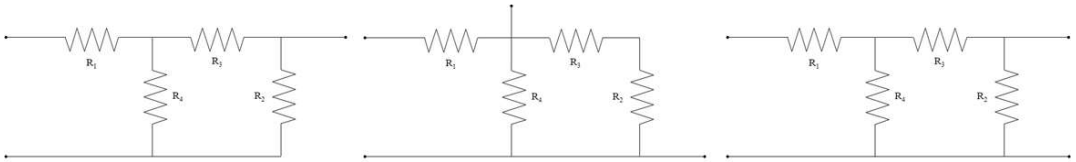
Fig. 10.57 – Simbolo di un generatore di corrente controllato in corrente. 74

Domande

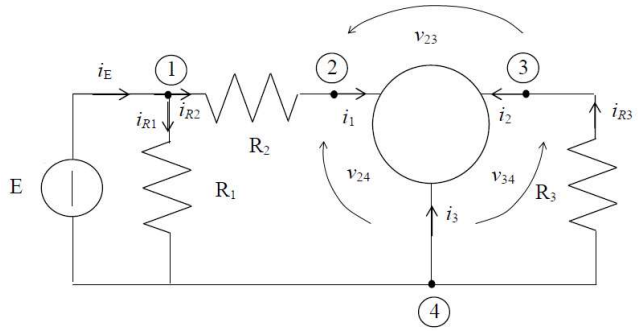
Teoria

L'N polo

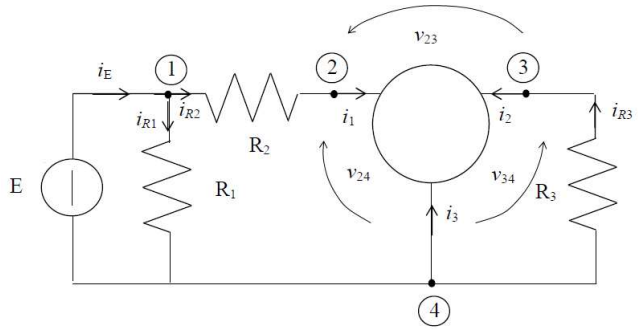
10.1 Quali tra i seguenti è un esempio di 3–polo di resistenze?



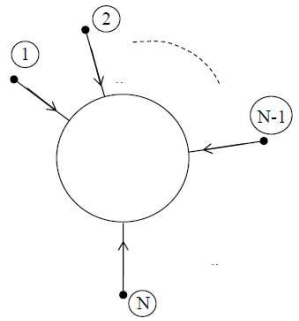
10.2 Dato il 3–polo di figura, con terminali 1-2-3, quali sono le condizioni che devono soddisfare le correnti $i_1(t)$, $i_2(t)$ e $i_3(t)$?



10.3 Dato il 3–polo di figura, con terminali 1-2-3, quali sono le condizioni che devono soddisfare le tensioni $v_{24}(t)$, $v_{23}(t)$ e $v_{34}(t)$?

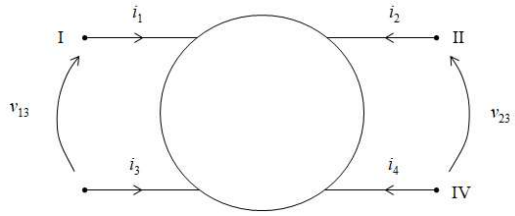


10.4 Considerato l'N–polo di figura, che condizione devono soddisfare le N correnti dei terminali?



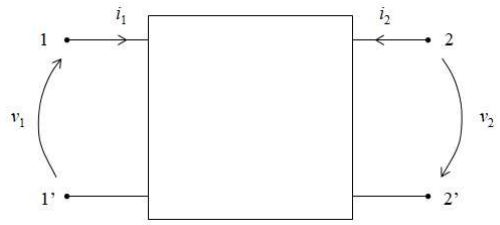
I doppi bipoli

10.5 Considerato il 4–polo di figura, quale tra le seguenti è la corretta condizione affinché si tratti di un doppio bipolo?

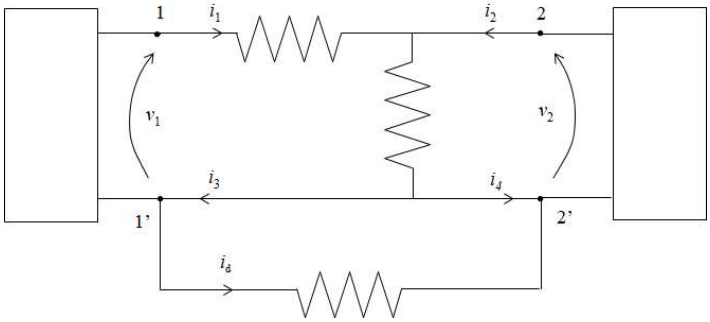


10.6 Che si intende per porta primaria e porta secondaria di un doppio bipolo?

10.7 Nel doppio bipolo di figura, quali convenzioni sono state fatte alle due porte?

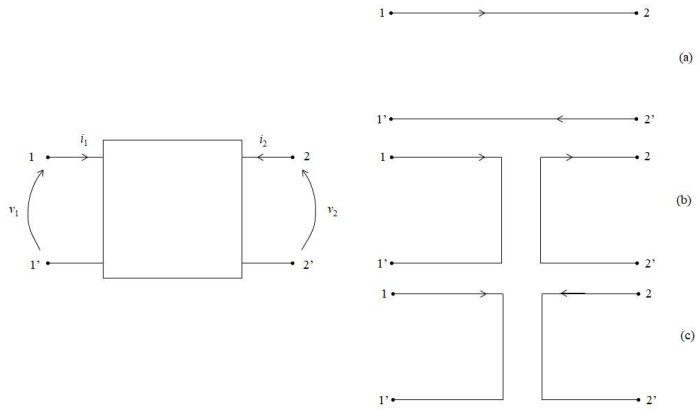


10.8 Il 4–polo resistivo 11'-22' di figura, si comporta come un doppio bipolo?



Il grafo di un doppio bipolo

10.9 Quali tra i grafici di figura rappresenta correttamente il grafo orientato del doppio bipolo di figura?



La caratterizzazione di un doppio bipolo

10.10 Che significa controllare in corrente (tensione) un doppio bipolo?

10.11 Cosa significa controllare in maniera ibrida un doppio bipolo?

10.12 In quanti modi è possibile caratterizzare un doppio bipolo?

10.13 Che generatori si utilizzano, alle due porte, per ottenere la caratterizzazione in corrente (tensione, ibrida) di un doppio bipolo?

10.14 Nella caratterizzazione in corrente di un doppio bipolo, quali grandezze si controllano alle due porte?

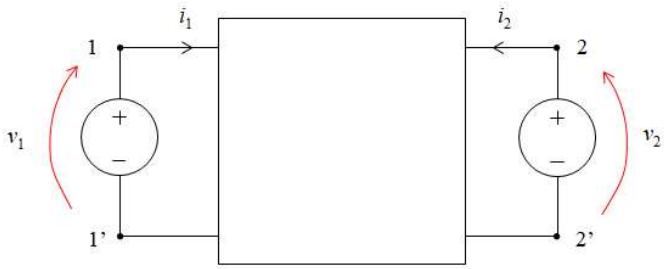
10.15 Che caratterizzazione si è usata per un assegnato doppio bipolo se le equazioni che lo caratterizzano sono quelle indicate nel seguito (fare tutti i possibili casi)?

$$\begin{cases} i_1(t) = f_1\left(v_1(t), v_2(t)\right) \\ i_2(t) = f_2\left(v_1(t), v_2(t)\right) \end{cases}$$

10.16 Come abbiamo scelto di controllare un doppio bipolo se le equazioni che lo caratterizzano sono quelle indicate nel seguito (fare tutti i possibili casi)?

$$\begin{cases} i_1(t) = f_1\left(v_1(t), i_2(t)\right) \\ v_2(t) = f_2\left(v_1(t), i_2(t)\right) \end{cases}$$

10.17 Che caratterizzazione si intende utilizzare se si è alimenta un doppio bipolo assegnato come mostrato in figura (fare tutti i possibili casi)?



La potenza assorbita da un doppio bipolo

10.18 Quale, tra le seguenti, è la corretta espressione della potenza assorbita da un doppio bipolo su cui si è fatta la convenzione dell'utilizzatore sulle due porte?

10.19 Quale, tra le seguenti, è la corretta espressione della potenza assorbita da un doppio bipolo su cui si è fatta la convenzione del generatore sulle due porte?

I doppi bipoli a–dinamici

10.20 Come si definisce un doppio bipolo a–dinamico?

La caratterizzazione di un doppio bipolo a–dinamico lineare e tempo invariante

10.21 Come si definisce un doppio bipolo a–dinamico lineare tempo invariante?

10.22 In quanti modi è possibile caratterizzare un doppio bipolo di resistenze lineari e tempo invarianti?

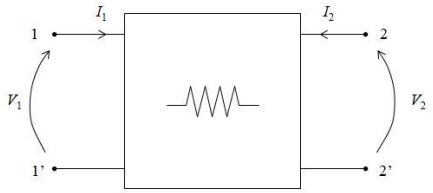
10.23 Quante matrici diverse è possibile utilizzare per caratterizzare un doppio bipolo?

10.24 Quale è l'analogo della relazione caratteristica di un bipolo per un doppio bipolo?

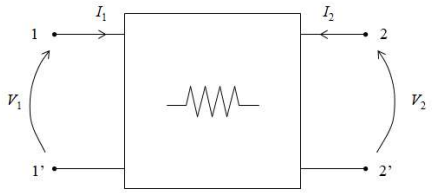
La caratterizzazione in corrente e tensione e la matrice delle resistenze e delle conduttanze

10.25 Che grandezze controlliamo alle due porte di un doppio bipolo di resistenze se vogliamo caratterizzare in corrente (in tensione) il doppio bipolo?

10.26 Dato il doppio bipolo di figura, quale è l'espressione che ci permette di calcolare l'elemento R_{11} (R_{22}, R_m) della matrice delle resistenze **R** che caratterizza il doppio bipolo?



10.27 Dato il doppio bipolo di figura, quale è l'espressione che ci permette di calcolare l'elemento G_{11} (G_{22}, G_m) della matrice delle resistenze **G** che caratterizza il doppio bipolo?



10.28 Quale proprietà ha la matrice delle resistenze **R** che caratterizza un doppio bipolo sul quale è stata fatta la convenzione dell'utilizzatore alle due porte?

10.29 Quale proprietà ha la matrice delle conduttanze **G** che caratterizza un doppio bipolo sul quale è stata fatta la convenzione dell'utilizzatore alle due porte?

10.30 Quale teorema giustifica la simmetria della matrice delle resistenze **R** e delle conduttanze **G** di un doppio bipolo?

10.31 La matrice indicata nel seguito può rappresentare la matrice delle resistenze di un doppio bipolo sul quale è stata fatta la convenzione dell'utilizzatore alle due porte?

$$\mathbf{R} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

10.32 La matrice indicata nel seguito può rappresentare la matrice delle conduttanze di un doppio bipolo sul quale è stata fatta la convenzione dell'utilizzatore alle due porte?

$$\mathbf{G} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

10.33 Quale tra le seguenti NON è una matrice delle conduttanze **G** di un doppio bipolo sul quale è stata fatta la convenzione dell'utilizzatore alle due porte?

$$\mathbf{G} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \text{ (a); } \mathbf{G} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \text{ (b); } \mathbf{G} = \begin{vmatrix} 1 & 0.2 \\ 0.2 & 3 \end{vmatrix} \text{ (c)}$$

10.34 Data la matrice delle resistenze indicata nel seguito che caratterizza un doppio bipolo assegnato, quale è la matrice delle conduttanze relativa allo stesso doppio bipolo sul quale è stata fatta la convenzione dell'utilizzatore alle due porte?

$$\mathbf{R} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

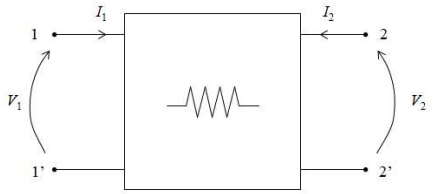
10.35 Perché la matrice delle resistenze indicata nel seguito non può rappresentare una matrice di caratterizzazione di un doppio bipolo sul quale è stata fatta la convenzione dell'utilizzatore alle due porte?

$$\mathbf{R} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

La caratterizzazione ibrida e le matrici ibride

10.36 Che grandezze controlliamo alle due porte di un doppio bipolo di resistenze se vogliamo una caratterizzazione ibrida di un doppio bipolo?

10.37 Dato il doppio bipolo di figura, quale è, tra le seguenti, l'espressione che ci permette di calcolare l'elemento H_{11} (H_{22}, H_m) delle matrici ibride **H** che caratterizzano il doppio bipolo?



10.38 Quale proprietà hanno le matrici ibride **H** che caratterizzano un doppio bipolo sul quale è stata fatta la convenzione dell'utilizzatore alle due porte?

10.39 Quale teorema giustifica la antisimmetria delle matrici **H** di un doppio bipolo sul quale è stata fatta la convenzione dell'utilizzatore alle due porte?

10.40 La matrice indicata nel seguito può rappresentare una matrice ibrida di un doppio bipolo?

$$\mathbf{H} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

10.41 La matrice indicata nel seguito può rappresentare la matrice ibrida di un doppio bipolo sul quale è stata fatta la convenzione dell'utilizzatore alle due porte?

$$\mathbf{H} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$$

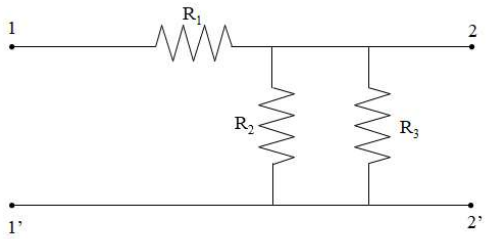
10.42 Quale tra le seguenti NON è una matrice ibrida **H** di un doppio bipolo sul quale è stata fatta la convenzione dell'utilizzatore alle due porte?

$$\mathbf{H} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \text{ (a); } \mathbf{H} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \text{ (b); } \mathbf{H} = \begin{vmatrix} 1 & 0.2 \\ -0.2 & 3 \end{vmatrix} \text{ (c)}$$

I problemi di analisi di doppi bipoli di resistenze

10.43 Cosa si intende per problema di analisi di un doppio bipolo di resistenze?

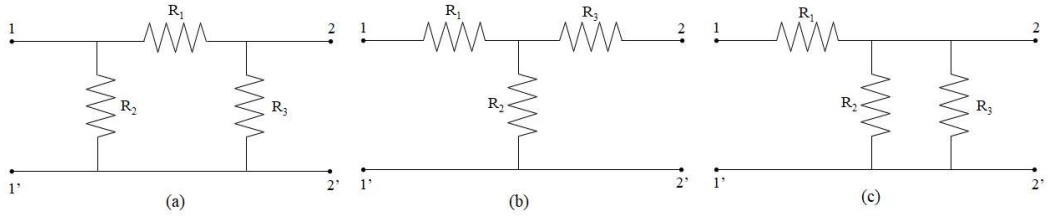
10.44 In riferimento alla figura, quale caratterizzazione risulta opportuno scegliere per analizzare il doppio bipolo (fai altri casi possibili)?



I problemi di sintesi di doppi bipoli di resistenze

10.45 Cosa si intende per problema di sintesi di un doppio bipolo?

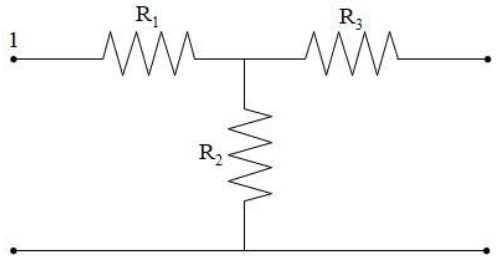
10.46 Quale delle seguenti è una configurazione a T (Π) di un doppio bipolo di resistenze?



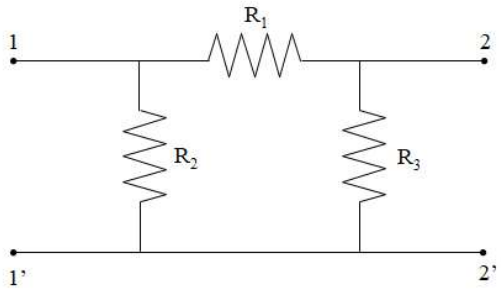
10.47 Come si chiama la configurazione di un doppio bipolo che corrisponde ad una stella (triangolo) di resistenze?

10.48 Un doppio bipolo caratterizzato da una matrice delle resistenze (conduttanze, ibride) conviene essere sintetizzato da quale configurazione di resistenze?

10.49 Dato un doppio bipolo con configurazione di resistenze a T di figura, qual è l'espressione che lega il coefficiente R_{11} (R_{22}, R_m), della matrice delle resistenze che caratterizza il doppio bipolo, alle resistenze del doppio bipolo?



10.50 Dato un doppio bipolo con configurazione di resistenze a Π di figura, qual è l'espressione che lega il coefficiente G_{11} (G_{22}, G_m), della matrice delle resistenze che caratterizza il doppio bipolo, alle resistenze del doppio bipolo?



La potenza assorbita da un doppio bipolo di resistenze

10.51 Utilizzando la matrice delle resistenze, quale è l'espressione corretta della potenza assorbita da un doppio bipolo di resistenze su cui si è fatta la convenzione dell'utilizzatore sulle due porte?

10.52 Utilizzando la matrice delle conduttanze, quale è l'espressione corretta della potenza assorbita da un doppio bipolo di resistenze su cui si è fatta la convenzione dell'utilizzatore sulle due porte?

10.53 Utilizzando una delle due matrici ibridi, quale è l'espressione corretta della potenza assorbita da un doppio bipolo di resistenze su cui si è fatta la convenzione dell'utilizzatore sulle due porte?

10.54 La potenza assorbita da un doppio bipolo caratterizzato in corrente (tensione, con matrici ibride) dipende dal termine R_m (G_m, H_m)?

I doppi bipoli di impedenze

10.55 Cosa si intende per doppio bipolo di impedenze?

10.56 Come variano nel tempo le grandezze alle due porte di un doppio bipolo di impedenze?

10.57 È possibile caratterizzare un doppio bipolo in cui sono presenti elementi passivi dinamici?

La caratterizzazione di un doppio bipolo di impedenze

10.58 Quali sono le matrici che si possono utilizzare per caratterizzare un doppio bipolo di impedenze?

La matrice delle impedenze e ammettenze

10.59 Cosa rappresentano i coefficienti $\dot{Z}_{11}$ e $\dot{Z}_{22}$ della matrice $\dot{\mathbf{Z}}$ di un doppio bipolo di impedenze (matrice $\dot{\mathbf{Y}}$)?

10.60 Cosa rappresenta il coefficiente $\dot{Z}_m$ della matrice $\dot{\mathbf{Z}}$ di un doppio bipolo di impedenze (matrice $\dot{\mathbf{Y}}$)?

10.61 Cosa si intende per impedenza (ammettenza) propria di un doppio bipolo?

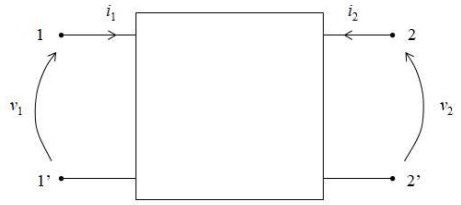
10.62 Il valore degli elementi della matrice delle impedenze $\dot{\mathbf{Z}}$(ammettenze $\dot{\mathbf{Y}}$) di un doppio bipolo dipende dalla convenzione fatta alle porte?

10.63 Perché la matrice delle $\dot{\mathbf{Z}}$(delle $\dot{\mathbf{Y}}$) è simmetrica?

10.64 Cosa si intende per impedenza mutua (ammettenza mutua) di un doppio bipolo?

10.65 Che grandezze controlliamo alle due porte di un doppio bipolo di impedenze se vogliamo caratterizzare in corrente (in tensione) il doppio bipolo?

10.66 Dato il doppio bipolo di figura che si trova a regime sinusoidale, quale è l'espressione che ci permette di calcolare l'elemento $\dot{Z}_{11}$ ($\dot{Z}_{22}$, $\dot{Z}_m$) della matrice delle resistenze $\dot{\mathbf{Z}}$ che caratterizza il doppio bipolo nel dominio simbolico?



10.67 Quale proprietà ha la matrice delle impedenze $\dot{\mathbf{Z}}$(delle ammettenze $\dot{\mathbf{Y}}$) che caratterizza un doppio bipolo sul quale è stata fatta la convenzione dell'utilizzatore alle due porte?

10.68 Quale teorema giustifica la simmetria della matrice delle impedenze $\dot{\mathbf{Z}}$(delle ammettenze $\dot{\mathbf{Y}}$) di un doppio bipolo?

10.69 La matrice indicata nel seguito può rappresentare la matrice delle impedenze di un doppio bipolo sul quale è stata fatta la convenzione dell'utilizzatore alle due porte?

$$\dot{\mathbf{Z}} = \begin{vmatrix} 1 & j2 \\ j2 & 3 \end{vmatrix}$$

10.70 La matrice indicata nel seguito può rappresentare la matrice delle ammettenze di un doppio bipolo sul quale è stata fatta la convenzione dell'utilizzatore alle due porte?

$$\dot{\mathbf{Y}} = \begin{vmatrix} -1 & j5 \\ j5 & 3 \end{vmatrix}$$

10.71 Quale tra le seguenti NON è una matrice delle ammettenze $\dot{\mathbf{Y}}$ di un doppio bipolo sul quale è stata fatta la convenzione dell'utilizzatore alle due porte?

$\dot{\mathbf{Y}} = \begin{vmatrix} 1 & 1+j2 \\ 1+j2 & 3j \end{vmatrix}$ (a); $\dot{\mathbf{Y}} = \begin{vmatrix} 1+j & 1-j2 \\ 1+j2 & 3j \end{vmatrix}$ (b); $\dot{\mathbf{Y}} = \begin{vmatrix} 1-j & j2 \\ j2 & 3j \end{vmatrix}$ (c)

10.72 Data la matrice delle resistenze indicata nel seguito che caratterizza un doppio bipolo assegnato, quale è la matrice delle ammettenze relativa allo stesso doppio bipolo sul quale è stata fatta la convenzione dell'utilizzatore alle due porte?

$$\dot{\mathbf{Z}} = \begin{vmatrix} 2+j5 & j2 \\ j2 & 3 \end{vmatrix}$$

10.73 Perché la matrice delle impedenze indicata nel seguito non può rappresentare una matrice di caratterizzazione di un doppio bipolo di impedenze sul quale è stata fatta la convenzione dell'utilizzatore alle due porte?

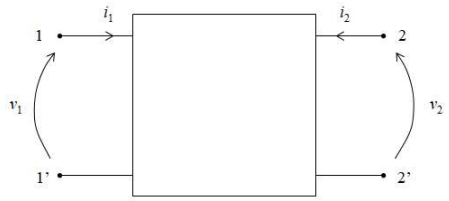
$$\dot{\mathbf{Z}} = \begin{vmatrix} 1 & -j2 \\ j2 & 1+j3 \end{vmatrix}$$

Le matrici ibride nel dominio simbolico

10.74 Perché le matrici $\dot{\mathbf{H}}$ di una caratterizzazione ibrida di un doppio bipolo di impedenze sono antisimmetriche?

10.75 Che grandezze controlliamo alle due porte di un doppio bipolo di impedenze se vogliamo una caratterizzazione ibrida di un doppio bipolo?

10.76 Dato il doppio bipolo di figura che si trova a regime sinusoidale, quale è, tra le seguenti, l'espressione che ci permette di calcolare l'elemento H_{11} (H_{22}, H_m) delle matrici ibride $\dot{\mathbf{H}}$ che caratterizzano il doppio bipolo nel dominio simbolico?



10.77 Quale proprietà hanno le matrici ibride $\dot{\mathbf{H}}$ che caratterizzano un doppio bipolo di impedenze nel dominio simbolico sul quale è stata fatta la convenzione dell'utilizzatore alle due porte?

10.78 Quale teorema giustifica l'antisimmetria delle matrici ibride $\dot{\mathbf{H}}$ di un doppio bipolo sul quale è stata fatta la convenzione dell'utilizzatore alle due porte?

10.79 La matrice indicata nel seguito può rappresentare una matrice ibrida di un doppio bipolo d'impedenze?

$$\dot{\mathbf{H}} = \begin{vmatrix} j4 & 1-j2 \\ 1+j2 & 3 \end{vmatrix}$$

10.80 La matrice indicata nel seguito può rappresentare la matrice ibrida di un doppio bipolo di impedenze sul quale è stata fatta la convenzione dell'utilizzatore alle due porte?

$$\dot{\mathbf{H}} = \begin{vmatrix} 1-j & j2 \\ -j2 & 3 \end{vmatrix}$$

I teoremi di reciprocità

10.81 Cosa dimostra il teorema di reciprocità?

10.82 Per cosa utilizziamo il teorema di reciprocità?

10.83 Per quali tipi di circuiti vale il teorema di reciprocità?

10.84 Cosa asserisce il teorema di reciprocità?

10.85 Quante "forme esistono del teorema di reciprocità?

10.86 Nella I forma (II forma, III forma) del teorema di reciprocità da applicare ad un doppio bipolo, quali grandezze si controllano alle due porte?

10.87 Qual è l'espressione che rappresenta la simmetria tra causa ed effetto individuata dalla I forma (II forma, III forma) del teorema di reciprocità?

10.88 In virtù di quale teorema si dimostra il teorema di reciprocità?

10.89 Per dimostrare il teorema di reciprocità è necessario utilizzare che tipo di circuiti?

Esercizi

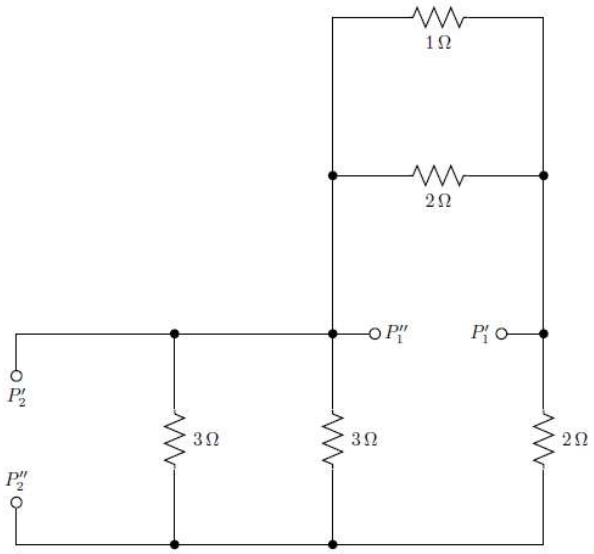
Quando indicato dalla presenza del simbolo @ si tratta di esercizi risolti presi dal sito:

https://autocircuits.org/autocir_home.html. È possibile generare altri esercizi risolti utilizzando il sito che prevede varie categorie di esercizi. Quando trovate il simbolo @, vuol dire che è possibile utilizzare il sito per la tipologia di esercizi che si stanno risolvendo.

Caratterizzazione di doppi bipoli di resistenze

10.90 @ Calcolare la matrice delle conduttanze del doppio bipolo $P_1'P_1''$– $P_2'P_2''$ di figura.

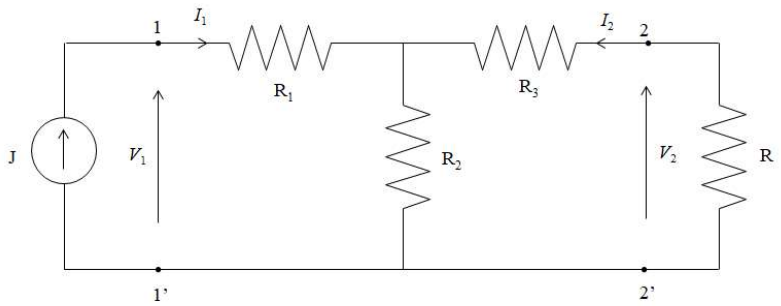
$$\mathbf{G} = \begin{vmatrix} 2 & -1/2 \\ -1/2 & 7/6 \end{vmatrix}$$



Circuiti con doppi bipoli di resistenze

10.91 Calcolare la tensione V_1 e la corrente I_2 del circuito di figura utilizzando una caratterizzazione per il doppio 11'-22'.
(J= 5A, R_1=1 Ω, R_2=2 Ω, R_3=3 Ω, R=10 Ω)

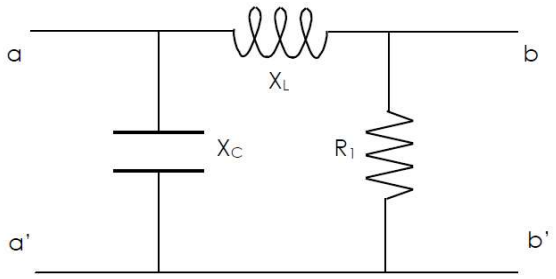
R_{11} = 3 Ω, R_{22} = 5 Ω, R_m = 2 Ω,
V_1 = 41/3 V; I_2 = –2/3 A



Caratterizzazione di doppi bipoli di impedenze

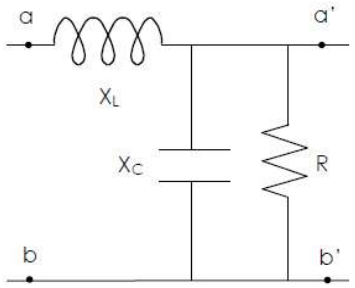
10.92 Calcolare la matrice delle ammettenze $\dot{Y}$ del doppio bipolo aa'-bb' in figura, facendo la convenzione dell'utilizzatore su entrambe le porte.
(R_1=2 Ω; X_C= –10 Ω; X_L=12 Ω)

$$\dot{Y}_{11} = 0.5 - j0.25,\ \dot{Y}_{22} = j0.25, \dot{Y}_m = -j0.25$$



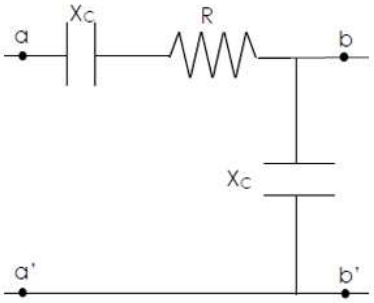
10.93 Calcolare la matrice delle impedenze $\dot{\mathbf{Z}}$ del doppio bipolo ab-a'b' in figura, facendo la convenzione dell'utilizzatore su entrambe le porte.
($R=2\ \Omega$; $X_C=2\ \Omega$; $X_L=3\ \Omega$)

$$\dot{\mathbf{Z}} = \begin{pmatrix} 1+j2 & 1-j \\ 1-j & 1-j \end{pmatrix}$$



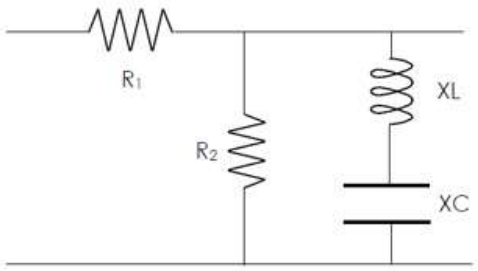
10.94 Calcolare la matrice delle ammettenze $\dot{\mathbf{Y}}$ del doppio bipolo in figura considerando la convenzione dell'utilizzatore alle porte.
($R=2\ \Omega$; $X_C=2\ \Omega$)

$$\dot{\mathbf{Y}} = \begin{pmatrix} 2.5+j2.5 & -2.5-j2.5 \\ -2.5-j2.5 & 2.5+j7.5 \end{pmatrix}$$



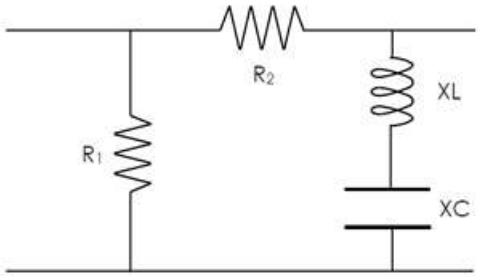
10.95 Calcolare la matrice delle impedenze $\dot{\mathbf{Z}}$ del doppio bipolo in figura, facendo la convenzione dell'utilizzatore su entrambe le porte
(R_1=2 Ω; R_2=5 Ω; X_C=5 Ω; X_L=10 Ω)

$$\dot{\mathbf{Z}} = \begin{vmatrix} 4.5 + j2.5 & 2.5 + j2.5 \\ 2.5 + j2.5 & 2.5 + j2.5 \end{vmatrix}$$



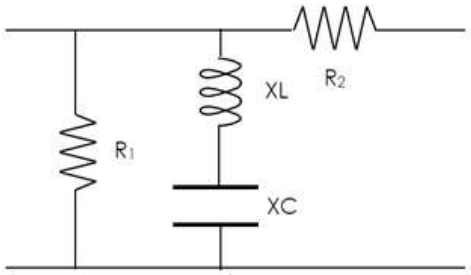
10.96 Calcolare la matrice delle ammettenze $\dot{\mathbf{Y}}$ del doppio bipolo in figura, facendo la convenzione dell'utilizzatore su entrambe le porte
(R_1=2 Ω; R_2=5 Ω; X_C=5 Ω; X_L=10 Ω)

$$\dot{\mathbf{Y}} = \begin{vmatrix} 7/10 & -0.2 \\ -0.2 & 0.2 - j0.2 \end{vmatrix}$$



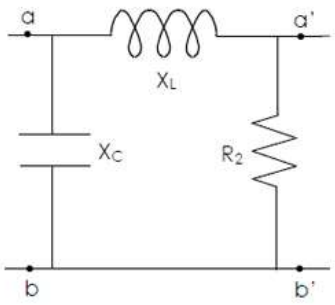
10.97 Calcolare la matrice delle ammettenze $\dot{\mathbf{Y}}$ del doppio bipolo in figura, facendo la convenzione dell'utilizzatore su entrambe le porte.
(R_1=0.5 Ω; R_2=0.5 Ω; X_C=0.5 Ω; X_L=1 Ω)

$$\dot{\mathbf{Y}} = \begin{vmatrix} 4 - j2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$$



10.98 Calcolare la matrice delle ammettenze $\dot{\mathbf{Y}}$ del doppio bipolo in figura considerando la convenzione dell'utilizzatore alle porte.
(R=1/10 Ω; X_C=1/10 Ω; X_L=1/15 Ω)

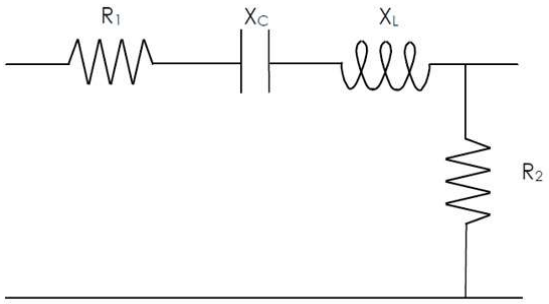
$$\dot{\mathbf{Y}} = \begin{vmatrix} -5 & j15 \\ j15 & 10 - j15 \end{vmatrix}$$



10.100 Calcolare la matrice delle impedenze del doppio bipolo in figura facendo la convenzione dell'utilizzatore su entrambe le porte.

(R_1=10 Ω, R_2=10 Ω; X_C=10 Ω; X_L=10 Ω)

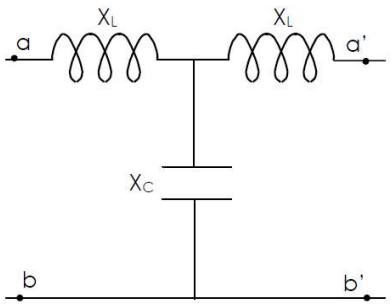
$$\dot{\mathbf{Z}} = \begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 10 \end{pmatrix}$$



10.101 Calcolare la matrice delle impedenze del doppio bipolo ab–a'b' in figura facendo la convenzione dell'utilizzatore su entrambe le porte.

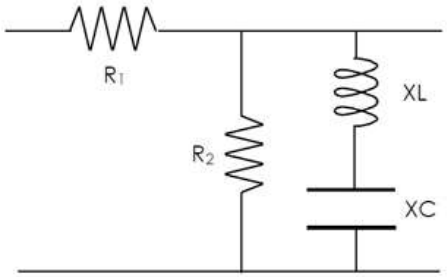
(X_C= –10 Ω; X_L=12 Ω)

$$\dot{\mathbf{Z}} = \begin{pmatrix} 2 & -10 \\ -10 & 2 \end{pmatrix}$$

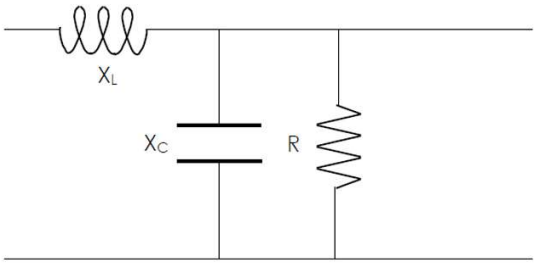


10.102 Calcolare la matrice ibrida del doppio bipolo in figura che ha la seconda porta controllata in tensione, facendo la convenzione dell'utilizzatore su entrambe le porte. (R_1=2 Ω; R2=5 Ω; XC=5 Ω; XL=10 Ω)

$$\dot{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0.2 - j0.2 \end{pmatrix}$$



10.103 Calcolare una matrice ibrida del doppio bipolo in figura avendo fatto la convenzione dell'utilizzatore su entrambe le porte.

(R=2 Ω; X_C= −10 Ω; X_L=10 Ω)

$$\dot{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} j10 & 1 \\ -1 & 0.5 + j0.1 \end{pmatrix}$$