# Lezione 11

# Le linee di distribuzione dell'energia elettrica. Il trasformatore. I circuiti trifase

Lezioni di **Elettrotecnica** per studenti di **Ingegneria Gestionale**

ideate e scritte da

**Lorenza Corti**

con il contributo di **Vincenzo Paolo Loschiavo**

# Sommario

**1 Le linee di distribuzione dell'energia elettrica ..... 3**

1.1 Sistemi monofase e sistemi trifase ..... 3

1.2 Modello circuitale di un sistema di produzione-trasporto-consumo monofase . 6

1.2.1 *Il dimensionamento di una linea monofase ed efficienza del trasporto** ..... 8

1.2.2 *Il rifasamento di un carico di una linea di distribuzione monofase* ..... 9

2 **Il trasformatore** ..... 13

2.1 Il trasformatore ideale ..... 15

2.1.1 *Le proprietà del trasporto di impedenza* ..... 18

2.1.2 *Esercizio: circuito con trasformatore* ..... 26

2.1.3 *Esercizio: l'adattamento in potenza di un carico** ..... 28

2.2 Il trasformatore reale* ..... 32

2.2.1 *Lo schema circuitale equivalente di un trasformatore reale* ..... 39

2.3 Il trasformatore nelle linee di trasporto ad alta tensione ..... 41

3 **I sistemi trifase** ..... 45

3.1 I sistemi trifase simmetrici ed equilibrati ..... 49

3.2 La potenza nei sistemi trifase simmetrici ed equilibrati ..... 54

3.2.1 *La misura della potenza nei sistemi trifase simmetrici ed equilibrati* ..... 57

3.3 Esercizio: calcolo della corrente di linea di un trifase* ..... 63

**Indice delle figure** ..... 65

**Domande** ..... 68

Teoria ..... 68

Esercizi ..... 75

# 1 Le linee di distribuzione dell'energia elettrica

Lo scopo di una ***linea di distribuzione dell'energia elettrica***, anche detta rete di distribuzione, è quello di portare l'energia dalle centrali elettriche di produzione fino ai luoghi di utilizzo, città e zone industriali, che possono essere distanti decine o centinaia di chilometri. La posizione geografica delle centrali è infatti vincolante nel caso di impianti idroelettrici, geotermici o eolici. La rete di distribuzione ha anche la funzione di interconnettere i centri di produzione non solo nazionali, ma anche transnazionali al fine di ottimizzare la produzione secondo le necessità di utilizzazione. Il consumo energetico non è infatti costante, ma varia nel tempo calando notevolmente durante le ore notturne; mentre però alcune centrali possono essere portate a regimi di produzione inferiori (es. le centrali idroelettriche), per altre questo non è possibile. Grazie alla rete di distribuzione è possibile quindi riallocare le risorse riducendo gli sprechi energetici. Tipicamente il controllo della produzione e della distribuzione dell'energia si ottiene attraverso una rete ad alta tensione che collega tutte le centrali elettriche di produzione in modo tale da ridurre gli effetti generalizzati di un guasto su una centrale grazie all'automatizzazione della rete stessa.

## 1.1 Sistemi monofase e sistemi trifase

Le linee di distribuzione possono essere di tipo ***monofase*** o di tipo ***trifase***. Le linee monofase sono costituite da due conduttori, uno di andata (la ***fase***) e uno di ritorno (il ***neutro***), che collegano la centrale di produzione (G) al carico (C) mediante delle (lunghe) linee di trasmissione come mostrato in Fig. 11.1.

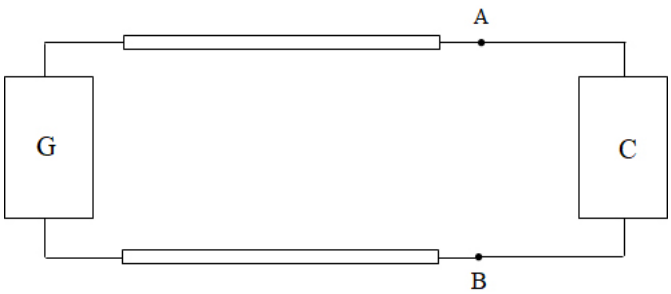



*Fig. 11.1 – Sistema di trasporto monofase dell'energia elettrica.*

I sistemi trifase sono sistemi più complessi, costituiti, come descritto nel § 3, dall'unione di tre sistemi monofase in cui il neutro viene messo in comune come mostrato in Fig. 11.2.

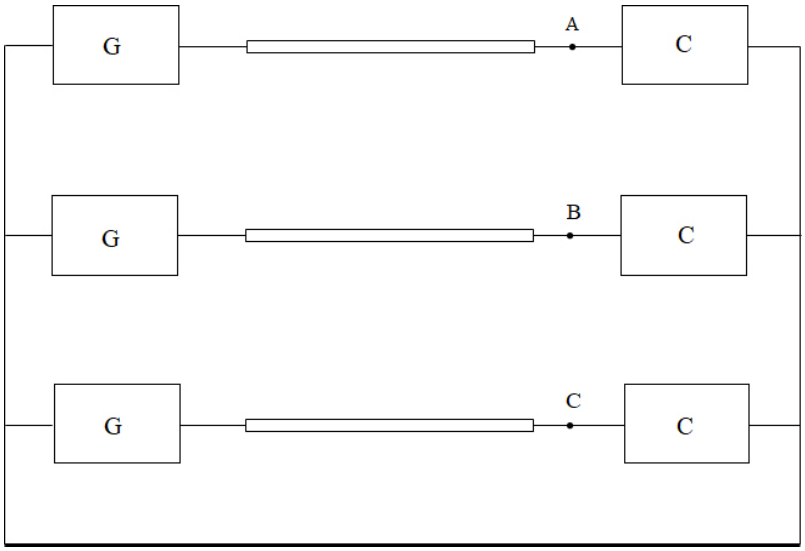



*Fig. 11.2 – Sistema di trasporto trifase dell'energia elettrica.*

Il fatto che nei sistemi trifase è possibile mettere in comune i tre conduttori di ritorno comporta un grosso risparmio in termini di materiali impiegati nella realizzazione del sistema di distribuzione dell'energia e questa è uno dei motivi per cui si impiegano diffusamente i sistemi trifase per il trasporto dell'energia elettrica quando si devono affrontare grandi distanze. Il taglio dei costi sul materiale non è l'unico motivo per l'impiego dei sistemi trifase, oltre ad essere semplici da realizzare, sono anche affidabili e funzionali quando si tratta di potenze elevate. Inoltre, questi sistemi oltre ad essere impiegati per il trasporto, vengono utilizzati negli impianti industriali perché, in virtù del campo magnetico che riescono a generare, permettono, a differenza dei sistemi monofase, di far funzionare opportunamente i motori industriali quale il ***motore asincrono trifase***. Infine, possiamo dire che a parità di potenza (soprattutto quando parliamo di grandi potenze) i costi per i materiali dei ***generatori trifase*** è all'incirca dimezzato e quindi sistemi trifase vengono utilizzati anche nella fase di produzione dell'energia elettrica.

I sistemi monofase, in maniera complementare, sono i più diffusi nelle abitazioni e vengono utilizzati principalmente per alimentare le utenze finali come elettrodomestici, sistemi di illuminazione e riscaldamento e componenti a bassa potenza in quanto i sistemi trifase sono non convenienti per usi domestici e difficili da collegare alle semplici batterie. Generalmente il voltaggio dei sistemi trifase è di circa 400 V, mentre quella dei sistemi monofase è di circa 200V. Pertanto, i sistemi monofase si preferiscono negli impianti elettrici residenziali anche per limitare la pericolosità delle scosse elettriche.

Il passaggio da sistema trifase, impiegato nel trasporto dell'energia, al sistema monofase impiegato nelle utenze domestiche finali, avviene nelle ***cabine elettriche***. In Italia il valore efficace della tensione tra le due fasi è pari a 380V, mentre tra la fase e il neutro è di 230V. La connessione monofase è ricavata da quella trifase utilizzando uno dei tre cavi di fase ed il neutro. Il valore efficace della tensione del monofase che alimenta le nostre abitazioni è quindi di 230V, tensione di funzionamento delle comuni apparecchiature elettriche domestiche.

Come vedremo nel § 2, nella rete di distribuzione dell'energia elettrica, sia monofase che trifase, vengono largamente impiegati dei dispositivi, chiamati ***trasformatori***, in grado di variare, o meglio "trasformare", le grandezze elettriche tensione e corrente nel passaggio tra una parte di rete, ad esempio la produzione, e un'altra, ad esempio l'ingresso della linea di trasmissione, mantenendo invariata la potenza elettrica apparente. La possibilità di variare i valori di tensione e corrente, come vedremo, è di grande utilità, soprattutto per quanto riguarda l'efficienza di trasporto dell'energia.

Con l'alimentazione monofase la potenza impegnata è relativamente bassa, il valore contrattuale più comune è di 3 kW (i contratti delle nostre abitazioni) ma è anche possibile avere una fornitura di 1,5 kW, 4,5 kW fino ad un massimo di 6 kW (in casi eccezionali 10 kW). L'alimentazione trifase, anche se disponibile per una potenza di 3 kW, è di fatto solitamente utilizzata con potenze più elevate, in genere di almeno 6 kW.

Il contatore elettronico è diverso per un impianto monofase o trifase. Nel caso di fornitura trifase l'apposito contatore, oltre a tutte le informazioni che rileva quello monofase, indica anche la potenza reattiva Q.

In conclusione, i sistemi trifase e monofase sono complementari in quanto ognuno dei due ha dei vantaggi e degli svantaggi nel suo impiego come illustrato in Tabella 11.1.

| **Sistema** | ***Vantaggi*** | ***Svantaggi*** |
|---|---|---|
| ***Trifase*** | Generatore più funzionale ed affidabile<br>Ottimizzazione nel trasporto<br>Possibilità utilizzo motori trifase (semplici ed efficienti) | Non convenienti per piccole utenze (domestiche)<br>Difficoltà per abbinarli a batterie |
| ***Monofase*** | Utilizzo per illuminazione e riscaldamento<br>Utilizzo nella trazione elettrica<br>Trasmissione per grandissime distanze e per cavi sottomarini | Non producono un campo magnetico rotante, utile ai motori elettrici |

*Tabella 11.1 – Vantaggi e svantaggi dei sistemi monofase e trifase*[1].

## 1.2 Modello circuitale di un sistema di produzione-trasporto-consumo monofase

In questo paragrafo descriveremo il modello circuitale dei sistemi monofase per la distribuzione dell'energia elettrica ed in particolare la sua efficienza e la minimizzazione dei costi lungo la linea di trasmissione (modellata con una resistenza nel modello circuitale) che trasporta tale energia. Questi sistemi potrebbero essere quelli che riguardano il trasporto dell'energia elettrica dalla cabina elettrica in cui avviene il passaggio da trifase a monofase all'utenza finale. Quindi nella Fig. 11.1 il bipolo G rappresenta tutto il sistema (centrale, linee trifase ….) in grado di fornirmi una data tensione (230V) in ingresso alla linea di trasmissione *l* che porta l'energia elettrica all'utenza finale C.

Nella realtà le centrali di produzione di energia elettrica convertono energia di altro tipo, come quella meccanica, in energia elettrica all'interno di strutture specializzate; le linee

[1] Contributo e tabella ricavati da: https://luce-gas.it/guida/contatore/luce/monofase-trifase

di trasmissione sono costituite da lunghi conduttori cilindrici di piccola sezione sostenuti da alti ***tralicci*** (sistemi trifase di trasmissione, vedi § 3)[2]; i carichi potrebbe essere il frigorifero di casa o meglio l'insieme (il parallelo da un punto di vista circuitale) degli apparecchi elettrici presenti nei nostri appartamenti o nel palazzo in cui abitiamo.

Ma noi vogliamo individuare un modello circuitale.

Supposto che il sistema di alimentazione si possa modellare con un circuito elettrico, e considerato il fatto che il sistema di distribuzione in Europa funziona con grandezze sinusoidali, possiamo modellare la centrale di produzione con un generatore di tensione che eroga una tensione avente fasore $\bar{E}$, il carico come un componete ohmico–induttivo di impedenza $\dot{Z}=R+jX$ [3], la linea di trasmissione come una resistenza $R_l$ .È possibile mostrare che, nonostante le linee di trasmissione insieme con i centri di produzione dell'energia elettrica e i carichi collegati costituiscano un sistema grande e complesso di distribuzione dell'energia, è possibile utilizzare un modello circuitale.

In Fig. 11.3 abbiamo rappresentato il generico sistema di Fig. 11.1 attraverso l'uso di un generatore ideale $\bar{E}$ che rappresenta la centrale di produzione, una resistenza $R_l$ che rappresenta la linea di trasmissione, un'impedenza $\dot{Z}=R+jX$ che rappresenta il carico. Come abbiamo anticipato, supponiamo di essere in regime sinusoidale in quanto i sistemi di trasporto dell'energia elettrica operano in regime sinusoidale ad una data frequenza (50 Hz in Europa). Il carico C tipicamente sarà un carico ohmico-induttivo e dunque la reattanza della sua impedenza sarà positiva:

$$\dot{Z}=R+jX \qquad (11.1)$$

con $X>0$.

---

[2] Quando siamo in treno e osserviamo il paesaggio o in aperta campagna è facile notare i tralicci che sostengono i lunghi conduttori deposti al sistema di distribuzione dell'energia elettrica.

[3] Un carico come un motore elettrico può essere modellato come un componente in cui si possono incontrare fenomeni di tipo ohmico e fenomeni di tipo induttivo. Questo è il motivo per cui il generico carico di una linea viene modellato come un carico ohmico–induttivo.

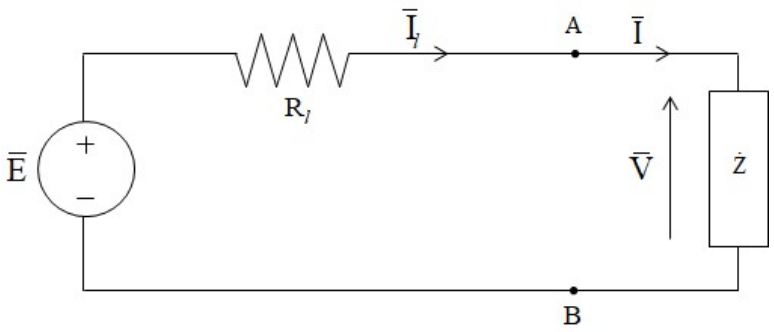



*Fig. 11.3 – Sistema di trasporto monofase dell'energia elettrica nel modello circuitale.*

Nel § 3 vedremo quale è il modello circuitale per sistemi di tipo trifase.

### *1.2.1 Il dimensionamento di una linea monofase ed efficienza del trasporto[4]**

Supponiamo di avere un sistema di trasporto monofase come quello di Fig. 11.3. Consideriamo una tipica utenza domestica C. In tale caso si ha che il modulo del fasore $\bar{V}$, diciamolo V=230 V e il valore massimo della potenza attiva assorbita, diciamola $P_{max}$=3.5 kW. Il valore della resistenza del carico C, diciamola $R_C$, è possibile ricavarla dall'espressione della potenza attiva del carico C:

$$P_{max} = \frac{V_{eff}^2}{R_C} \Rightarrow R_C = \frac{V_{eff}^2}{P_{max}} = \frac{(230)^2}{3500} = 15\Omega \qquad (11.2)$$

Consideriamo la linea di trasporto: un cavo di rame per il trasporto dell'energia da 1 $cm^2$ ha una resistenza per unità di lunghezza di circa 0.2 Ω/km. Per coprire una distanza di 10 km con i due cavi ("andata" e "ritorno") si ha una resistenza totale $R_l$=(0.2x10x2)Ω = 4 Ω. Dunque, il valore di resistenza di linea $R_l$ è comparabile con quello del carico $R_C$ e non quindi trascurabile. È intuibile come ciò abbia riflessi sulla tensione del carico e sull'efficienza del trasporto. Se poi immaginiamo di avere N

[4] Esercizio presente nella pubblicazione De Magistris, M., & Miano, G. (2007). *Circuiti: Fondamenti di circuiti per l'Ingegneria*. Springer Science & Business Media.

carichi equivalenti in parallelo, la condizione diviene più severa essendo la resistenza equivalente del carico complessivo pari a $R_C/N$.

### *1.2.2 Il rifasamento di un carico di una linea di distribuzione monofase*

Supponiamo di avere un sistema di trasporto come quello di Fig. 11.3. Il carico C per funzionare avrà necessità di assorbire una potenza attiva P pari a:

$$P=V_{eff}I_{eff}\cos\varphi \tag{11.3}$$

dove $\cos\varphi$ è il ***fattore di potenza*** (introdotto nella Lezione 9) del carico C, $V_{eff}$ e $I_{eff}$ sono i valori efficaci dei fasori tensione e corrente del carico C. Considerando la LKC al nodo A della Fig. 11.3, ricaviamo che il modulo della corrente che attraverserà la resistenza di linea $R_l$, e cioè la $I_l$, sarà uguale a quella del carico C, e cioè la $I_{eff}$. Dalla (9.12) della Lezione 9, possiamo scrivere che:

$$I_l=I_{eff}=\frac{P}{V_{eff}\cos(\varphi)}=\frac{S}{V_{eff}}=\frac{\sqrt{P^2+Q^2}}{V_{eff}} \tag{11.4}$$

dove S è la ***potenza apparente*** (vedi Lezione 9) assorbita dal carico C, P quella attiva e Q quella reattiva.

In virtù della legge di conservazione della potenza in un circuito, la potenza attiva erogata dal generatore $P_E$ sarà data da:

$$P_E=P_l+P \tag{11.5}$$

Nella (11.5), una volta fissata la potenza attiva P necessaria al funzionamento del carico C, la potenza da produrre $P_E$ dipenderà dal valore della potenza attiva $P_l$ dissipata per effetto Joule lungo la linea e quindi nella resistenza $R_l$. L'espressione di tale potenza è:

$$P_l=R_l I_l^2 \tag{11.6}$$

Affinché la potenza da produrre nella centrale $P_E$ sia il più piccola possibile, e ciò per ridurre i costi di produzione, dovrà essere quanto più piccola possibile la potenza

dissipata $P_l$ della (11.6). Ciò si ottiene agendo sul valore efficace della corrente lungo la linea $I_l$. Per far questo consideriamo l'espressione (11.4) dove il valore efficace della tensione $V_{eff}$ e la potenza P le dobbiamo considerare fissate per quanto detto precedentemente. Per diminuire il valore di $I_{eff}$ possiamo dunque agire solo o sul fattore di potenza $\cos\varphi$ o equivalentemente, sulla potenza reattiva Q. Ciò è evidente, rispettivamente, nel terzo termine e quinto termine della (11.4). In particolare cercheremo di o massimizzare il fattore $\cos\varphi$ o, equivalentemente, minimizzare la potenza Q. Ricordiamo che un alto valore di $\cos\varphi$ si ottiene in corrispondenza di uno sfasamento $\varphi$ che tende a $0$ e quindi per un carico che tende ad essere puramente resistivo, o, detto in altre parole, che ha una potenza reattiva che tende a zero.

Come possiamo, senza alterare ciò che è all'interno del carico C di Fig. 11.3, far aumentare il $\cos\varphi$ e quindi diminuire la potenza reattiva Q? Con il cosiddetto ***rifasamento del carico*** che prevede l'inserimento di un condensatore tra i nodi A-B in parallelo al carico come mostrato in Fig. 11.4.

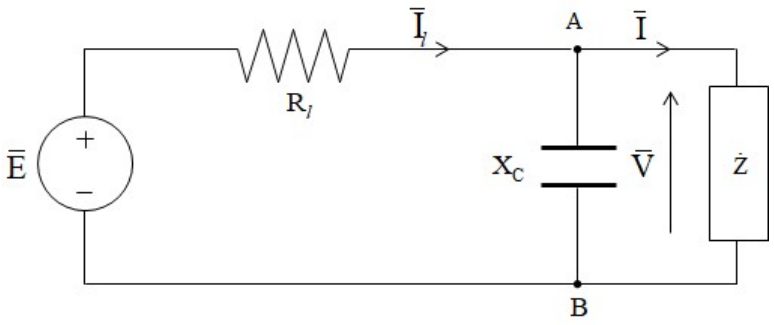



*Fig. 11.4 – Sistema di trasporto di Fig. 11.3 con carico rifasato.*

Vediamo perché con l'inserimento di un opportuno condensatore come mostrato in Fig. 11.4 si riesce ad abbassare il modulo della corrente di linea $I_l$. Consideriamo il sistema di trasporto rifasato di Fig. 11.5 dove abbiamo indicato la corrente di linea $\bar{I}_l'$, quella del carico $\bar{I}'$ e quella del condensatore introdotto per il rifasamento $\bar{I}_C$. Con l'inserimento del condensatore la corrente lungo la linea diventa: $I_l \rightarrow I_l'$

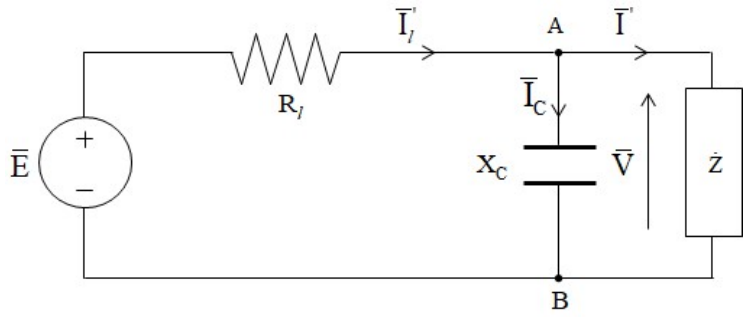



*Fig. 11.5 – Sistema di trasporto di Fig. 11.4 con l'indicazione delle correnti.*

Per il sistema di Fig. 11.5, possiamo scrivere la seguente LKC al nodo A:

$$\bar{I}_l' = \bar{I}' + \bar{I}_C \tag{11.7}$$

dove possiamo consideriamo la corrente $\bar{I}' + \bar{I}_C$ come la corrente del carico complessivo dato dal carico C e dal condensatore posto in parallelo ad esso. Il modulo della corrente $\bar{I}_l'$ lungo la linea sarà ora ricavabile dalla seguente espressione:

$$I_l' = \frac{P}{V_{eff}\cos(\varphi')} = \frac{\sqrt{P^2+Q'^2}}{V_{eff}} \tag{11.8}$$

dove $\cos(\varphi')$ è il fattore di potenza del carico complessivo e $Q'=Q-Q_C$ la potenza reattiva del carico complessivo.

Per minimizzare il valore di $I_l'$ della (11.8), possiamo agire sul fattore di potenza $\cos(\varphi')$ oppure, che è lo stesso, sulla potenza reattiva $Q$. I due fattori sono, infatti, legati:

$$\cos(\varphi') = \frac{P}{\sqrt{P^2+Q'^2}} \tag{11.9}$$

Per minimizzare il valore di $I_l'$ della (11.8), possiamo far tendere ad 1 il fattore di potenza o a zero la potenza reattiva:

$$\cos\left(\varphi'\right) \to 1 \Leftrightarrow Q' = Q - \frac{V_{eff}}{X_C^2} \to 0 \qquad (11.10)$$

dove $X_C$ è la reattanza del condensatore posto in parallelo al carico.

In conclusione, volendo fornire al carico una data potenza attiva P si potrà chiedere di rifasare il carico e quindi di utilizzare banchi di condensatori in parallelo al carico in maniera da ottenere un valore accettabile (elevato) del fattore di potenza $\cos\varphi$ e dunque valori accettabili (bassi) della potenza reattiva complessiva del carico rifasato dando luogo a valori accettabili (bassi) della corrente lungo la linea.

## 2 Il trasformatore

Il trasformatore è una macchina elettrica statica (perché non contiene parti in movimento) e serve per variare, o meglio "trasformare", le grandezze elettriche tensione e intensità di corrente da una rete primaria ad una secondaria, mantenendo invariata la potenza elettrica apparente. Il trasformatore trasferisce energia elettrica da un circuito elettrico ad un altro senza che questi siano a contatto tra loro in virtù del fenomeno d'induzione elettromagnetica su cui si basa il funzionamento di un trasformatore.

Il trasformatore più semplice è costituito da due conduttori elettrici (solenoidi) avvolti su un anello di materiale ferromagnetico detto ***nucleo magnetico***. *L'**avvolgimento*** al quale viene fornita energia viene detto ***primario***, mentre quello dal quale l'energia è prelevata è detto ***secondario***. I trasformatori sono macchine reversibili, per cui l'avvolgimento primario potrebbe essere anche visto come secondario e viceversa.

Il funzionamento del trasformatore si basa sulla legge di mutua induzione di Faraday-Neumann-Lenz. La corrente elettrica nell'avvolgimento primario, prodotta da una tensione elettrica applicata al primario, genera un flusso magnetico variabile nel nucleo del trasformatore che si concatena con l'avvolgimento secondario. Questo campo magnetico variabile induce una forza elettromotrice, o tensione, nell'avvolgimento secondario. Se al secondario e collegato un carico, su questo carico sarà applicata tale tensione.

Il trasformatore è una macchina in grado di operare essenzialmente in corrente alternata perché sfrutta i principi dell'elettromagnetismo legati a grandezze che variano nel tempo. Ed è per questo motivo che le linee di trasmissione si utilizzano in corrente alternata. Pertanto, studieremo il trasformatore in regime sinusoidale.

I trasformatori sono disponibili in una vasta gamma di dimensioni, dal trasformatore d'accoppiamento di piccole dimensioni situato all'interno di un microfono, alle unità grandissime, dal peso di centinaia di tonnellate, utilizzati per interconnettere porzioni di reti di energia nazionali. Tutti funzionano mediante gli stessi principi basilari, benché la gamma dei progetti sia ampia. Sebbene nuove tecnologie abbiano rimosso l'esigenza di trasformatori in alcuni circuiti elettronici, i trasformatori sono ancora presenti in quasi tutti i dispositivi elettronici progettati per utilizzare le tensioni fornite delle reti di

distribuzione l'alimentazione elettrica negli ambienti domestici. I trasformatori sono essenziali per la trasmissione di energia a grande distanza, resa praticabile dall'innalzamento ad alte tensioni come vedremo nel § 2.3. In particolare, il trasformatore viene ampiamente usato nelle cabine elettriche di trasformazione della rete elettrica come mezzo di interfacciamento tra le reti di trasmissione elettrica ad alta e altissima tensione, tipicamente realizzate con linee trifase, e quella di distribuzione a media e bassa tensione che collegano le centrali elettriche di produzione alle linee di trasmissione e queste alle utenze finali (industriali e domestiche).[5]

Il modello circuitale di un trasformatore è un doppio bipolo rappresentato dal simbolo di Fig. 11.6.

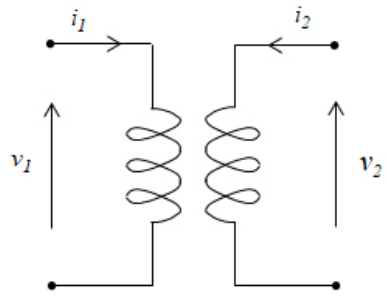



*Fig. 11.6 – Simbolo del trasformatore nel modello circuitale.*

Possiamo notare nella figura, allo stesso modo di come abbiamo fatto per i doppi bipolo, che il trasformatore ha due porte, quella che abbiamo chiamato primaria e quella che abbiamo chiamato secondaria nella Lezione 10. Come vedremo nei prossimi paragrafi, indipendentemente dalle due porte del doppio bipolo, introduciamo il concetto di primario e secondario di un trasformatore riferendoci agli avvolgimenti che lo realizzato. Nel § 2.2, mostreremo come è realizzato un trasformatore e descriveremo i due avvolgimenti che lo costituiscono. Il primario e il secondario non è detto che corrispondano rispettivamente alla porta primaria ($v_1$,$i_1$) del doppio bipolo e a quella secondaria ($v_2$,$i_2$), infatti i due avvolgimenti primario e secondario posso scambiarsi i ruoli.

[5] La parte introduttiva del paragrafo sul trasformatore è una rielaborazione e sintesi della pagina web di wikipedia: https://it.wikipedia.org/wiki/Trasformatore.

Osserviamo ancora che la condizione di doppio bipolo, data nella (10.8) della Lezione 10, è verificata indipendentemente da come il trasformatore è collegato al resto del circuito. In altre parole, è la sua struttura interna che lo fa essere un doppio bipolo.

Allo stesso modo di come abbiamo fatto per doppi bipoli, se vogliamo utilizzare il trasformatore in un circuito abbiamo bisogno di avere la sua relazione caratteristica. Anche in questo caso si tratta di due equazioni che legano tra loro le grandezze, $v_1$, $v_2$, $i_1$ e $i_2$. Questo sarà argomento del § 2.2 quando tratteremo il trasformatore reale.

Nel § 2.2, faremo vedere come il trasformatore reale di Fig. 11.6 può essere modellato con un ***trasformatore ideale*** e alcuni induttori opportunamente collegati ad esso. È per tale motivo che è indispensabile studiare il trasformatore ideale. Nel prossimo § 2.1 affronteremo tale argomento.

## 2.1 Il trasformatore ideale

Il trasformatore ideale di Fig. 11.7(a) è un doppio bipolo definito dalle seguenti relazioni che lo caratterizzano:

$$\begin{cases} v_1(t) = a v_2(t) \\ i_1(t) = -\dfrac{1}{a} i_2(t) \end{cases} \tag{11.11}$$

Dove $a$ è una costante che rappresenta il cosiddetto ***rapporto di trasformazione*** che può assumere un qualsivoglia valore, anche negativo. Si osservi che per un valore assoluto di $a$ maggiore di 1, cioè $|a|>1$, il trasformatore abbassa il valore delle tensioni e aumenta il valore delle correnti, viceversa nel caso in cui $|a|<1$. Quando $a=1$, le tensioni rimangono invariate, al contrario delle correnti per le quali una dei due cambia segno dando lungo al fatto che il trasformatore è come se non ci fosse. Alla stessa conclusione si giunge se si considera $a=-1$; in quest'ultimo caso tuttavia è la tensione a cambiare segno.

Il simbolo che rappresenta il trasformatore ideale di Fig. 11.7(a) ha l'indicazione in alto "$a$:1" che stà a significare che le relazioni caratteristiche del doppio bipolo sono le (11.11). Avendo scelto queste relazione caratteristiche, la porta 1-1' associata con la

tensione $v_1$ e corrente $i_1$, che è la porta primaria del doppio bipolo, corrisponde al ***primario del trasformatore***[6], mentre quella 2-2' associata alla tensione $v_2$ e corrente $i_2$, che è la porta secondaria del doppio bipolo, corrisponde al ***secondario del trasformatore***.

È possibile incontrare nei circuiti anche l'indicazione opposta presente nel simbolo del trasformatore, ossia "1:$a$" come mostrato nel simbolo di Fig. 11.7(b). In questo caso il primario del trasformatore è la porta 2-2' e il secondario è la porta 1-1'. Le relazioni caratteristiche in questo caso saranno:

$$\begin{cases} v_1(t) = \dfrac{1}{a} v_2(t) \\ i_1(t) = -a i_2(t) \end{cases} \tag{11.12}$$

Si osservi che a entrambe le porte dei due doppi bipolo della Fig. 11.7 è stata fatta la convenzione dell'utilizzatore.

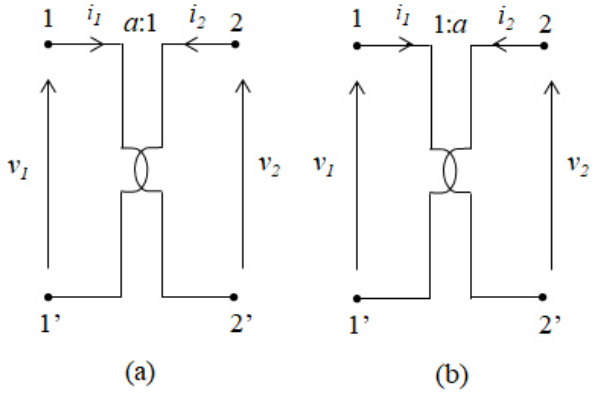



*Fig. 11.7 – Simbolo del trasformatore ideale*[7].

Mostreremo tra poco che la potenza elettrica assorbita dal trasformatore ideale è uguale a zero in qualsiasi condizione di funzionamento. Esso è dunque un doppio bipolo

[6] Il termine primario del trasformatore si riferisce a quello che viene indicato come ***avvolgimento primario del trasformatore***. Lo stesso quando si parla di secondario. Vedremo meglio ciò nel § 2.2.

[7] In figura non abbiamo esplicitato la dipendenza dal tempo. È sott'inteso quindi che le grandezze in gioco dipendano dal tempo.

passivo che non dissipa né immagazzina energia. Ciò si esprime anche dicendo che esso è ***trasparente alla potenza***. Per verificare quanto detto calcoliamo quanto vale la potenza istantanea complessiva assorbita dal doppio bipolo trasformatore:

$$\mathrm{p}(t) = v_1(t) i_1(t) \; + v_2(t) i_2(t) \tag{11.13}$$

La (11.13), in virtù delle relazioni caratteristiche (11.11) (ma anche (11.12)) diventa:

$$\mathrm{p}(t) = v_1(t) i_1(t) \; + v_2(t) i_2(t) = -a v_2(t) \frac{1}{a} i_2(t) \; + v_2(t) i_2(t) = 0 \tag{11.14}$$

Per il trasformatore ideale non vale la non amplificazione delle tensioni e delle correnti. Grazie alla linearità delle equazioni caratteristiche, invece, in un circuito che contenga trasformatori ideali continua a valere la sovrapposizione degli effetti.

Infine osserviamo che dalle relazioni (11.11) o dalle relazioni (11.12) si evince che il trasformatore ideale, a differenza di quello reale (vedi § 2.2), funziona anche se le grandezze sono costanti e quindi se il circuito si trova a regime stazionario. Come vedremo nelle esercitazioni tuttavia il trasformatore ideale verrà impiegato tipicamente in circuiti a regime sinusoidale. Le relazioni (11.11) allora verranno riscritte nel dominio dei fasori come:

$$\begin{cases} \overline{\mathrm{V}}_1 = a \overline{\mathrm{V}}_2 \\ \overline{\mathrm{I}}_1 = -\dfrac{1}{a} \overline{\mathrm{I}}_2 \end{cases} \tag{11.15}$$

e le (11.12):

$$\begin{cases} \overline{\mathrm{V}}_1 = \dfrac{1}{a} \overline{\mathrm{V}}_2 \\ \overline{\mathrm{I}}_1 = -a \overline{\mathrm{I}}_2 \end{cases} \tag{11.16}$$

Vediamo ora come studiare un circuito nel quale è presente un trasformatore ideale. Nel prossimo paragrafo studieremo alcune proprietà che è possibile evidenziare in un circuito in cui è presente un trasformatore ideale come quello di Fig. 11.8.

### *2.1.1 Le proprietà del trasporto di impedenza*

Osserviamo il circuito di Fig. 11.8, come esempio dell'impiego di un trasformatore ideale all'interno di un circuito. Per risolvere tale circuito sarà necessario risolvere un sistema di equazioni composto dalle equazioni di Kirchhoff, le relazioni caratteristiche dei bipoli presenti nel circuito alle due porte e le relazioni caratteristiche (11.11) del trasformatore. Così facendo arriveremo a scrivere:

$$\begin{cases} v_1(t) = a v_2(t) \\ i_1(t) = -\dfrac{1}{a} i_2(t) \\ v_1(t) = \mathrm{e}(t) - \mathrm{R}_1 i_1(t) \\ v_2(t) = -\mathrm{R}_2 i_2(t) \end{cases} \tag{11.17}$$

dove le leggi di Kirchhoff le abbiamo usate per affermare che la corrente e la tensione presenti nel generatore reale posto alla porta primaria del doppio bipolo sono quelle della porta 11' del trasformatore, e la corrente e la tensione presenti nel resistore $\mathrm{R}_2$ alla porta secondaria del doppio bipolo sono quelle della porta secondaria 22' del trasformatore.

Tuttavia, invece di risolvere il sistema (11.17), faremo vedere che il circuito si può semplificare in uno equivalente in cui il trasformatore ideale non compare esplicitamente. Per far ciò troveremo la relazione tra la tensione $v_1(t)$ e la corrente $i_1(t)$, e tra la tensione $v_2(t)$ e la corrente $i_2(t)$, che, inglobando implicitamente la presenza del trasformatore, individuano il sotto−circuito equivalente visto dai bipoli posti alle due porte del doppio bipolo. Nel seguito ci occuperemo di descrivere quanto appena affermato.

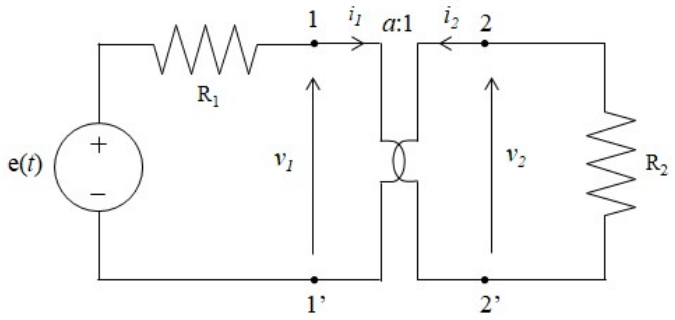



*Fig. 11.8 – Esempio di circuito con trasformatore ideale.*

Per la LKT alla maglia creata dalla resistenza $R_2$ e dalla porta secondaria del doppio bipolo o dal secondario del trasformatore, si ha:

$$v_2(t) = -R_2 i_2(t) \tag{11.18}$$

quindi, sostituendo la (11.18) nella prima delle (11.11) si ha:

$$v_1(t) = a v_2(t) = -a\, R_2 i_2(t) = a^2 R_2 i_1(t) = R_{eq} i_1(t) \tag{11.19}$$

Nella (11.19) abbiamo introdotto una resistenza equivalente $R_{eq} = a^2 R_2$ che rappresenta il carico complessivo, composto dal trasformatore e dal resistore $R_2$, visto al primario del trasformatore ideale e quindi dalla porta 11' del doppio bipolo. Di conseguenza, nel circuito di Fig. 11.8, al posto del trasformatore con un resistore connesso alla porta secondaria, sostituiamo un resistore equivalente come in Fig. 11.9. Questa proprietà del trasformatore ideale è detta ***proprietà del trasporto di impedenze***. È una proprietà importante perché, come vedremo, consente di trattare agevolmente i circuiti in cui sono presenti trasformatori ideali e anche reali. Si osservi che ancora una volta, nel sostituire il circuito di Fig. 11.9 a quello di Fig. 11.8, si è utilizzato un principio di equivalenza che abbiamo introdotto nella Lezione 4.

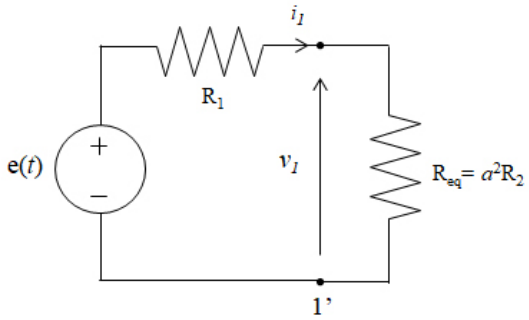



*Fig. 11.9 – Circuito equivalente a quello di Fig. 11.8 a cui si è utilizzata la proprietà del trasporto d'impedenza.*

Si può dimostrare che la proprietà del trasporto di impedenze (appunto diciamo impedenze!) vale anche per circuiti di impedenze, circuiti cioè in cui siano presenti anche condensatori e induttori ma che si trova in regime sinusoidale. In tal caso studieremo il circuito del dominio dei fasori e trasporteremo una impedenza $\dot{Z}_2$ che si trova al secondario di un trasformatore analogamente a quanto abbiamo fatto per la resistenza.

$$\overline{V}_1 = a\overline{V}_2 = -\ a\dot{Z}_2\dot{I}_2 = a^2\dot{Z}_2\dot{I}_1 = \dot{Z}_{eq}\dot{I}_1 \qquad (11.20)$$

Volendo specificare la natura dell'impedenza $\dot{Z}_2$, possiamo dire che se è un induttore allora si ha $\dot{Z}_2 = j\omega L_2$, e quindi:

$$\dot{Z}_{eq} = a^2\dot{Z}_2 \ \Rightarrow L_{eq} = a^2 L_2 \qquad (11.21)$$

Se $\dot{Z}_2$ è un condensatore allora si ha $\dot{Z}_2 = -j\dfrac{1}{\omega C_2}$, e quindi:

$$\dot{Z}_{eq} = a^2\dot{Z}_2 \Rightarrow C_{eq} = \frac{C_2}{a^2} \qquad (11.22)$$

Non è detto che al primario vi siano dei generatori e al secondario unicamente un carico. Potrebbe accadere di dover studiare un circuito che presenta generatori ad entrambe le porte, oppure solo al secondario. Consideriamo dunque il caso in cui al secondario, oltre

che al primario, vi sia un generatore reale di tensione. Facciamo riferimento alla Fig. 11.10.

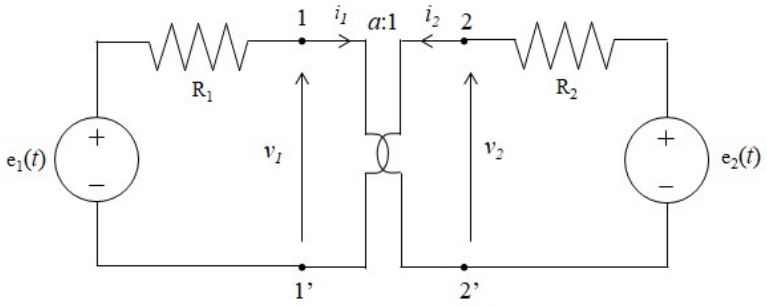



*Fig. 11.10 – Circuito con trasformatore ideale.*

Con le convenzioni fissate, l'equazione di Kirchhoff alla maglia del secondario costituita dalla porta secondaria del doppio bipolo e dal generatore reale di tensione è:

$$v_2(t) = \mathrm{e}_2(t) - \mathrm{R}_2 i_2(t) \tag{11.23}$$

Sostituendo in tale espressione le relazioni caratteristiche (11.11) del trasformatore ideale otteniamo:

$$\frac{v_1(t)}{a} = \mathrm{e}_2(t) + a\mathrm{R}_2 i_1(t) \tag{11.24}$$

da cui:

$$v_1(t) = a\mathrm{e}_2(t) + a^2\mathrm{R}_2 i_1(t) = \mathrm{e}_{2\mathrm{eq}}(t) + \mathrm{R}_{\mathrm{eq}} i_1(t) \tag{11.25}$$

Pertanto, il bipolo equivalente visto dalla porta 1-1', cioè dal primario del trasformatore, è equivalente al bipolo riportato in Fig. 11.11.

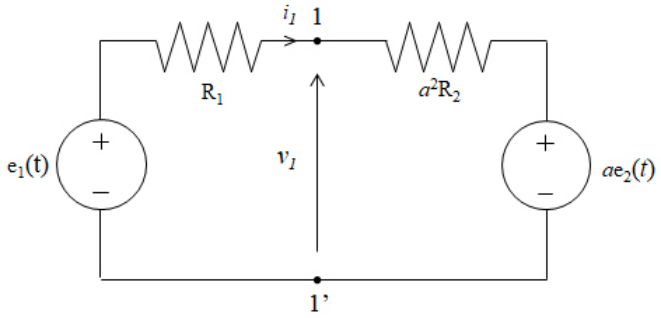



*Fig. 11.11 – Circuito di Fig. 11.10 con trasporto al primario.*

Consideriamo ora il circuito di Fig. 11.12. Proviamo ad applicare la formula del trasporto anche in questo caso in cui al secondario vi è posto un generatore reale di corrente.

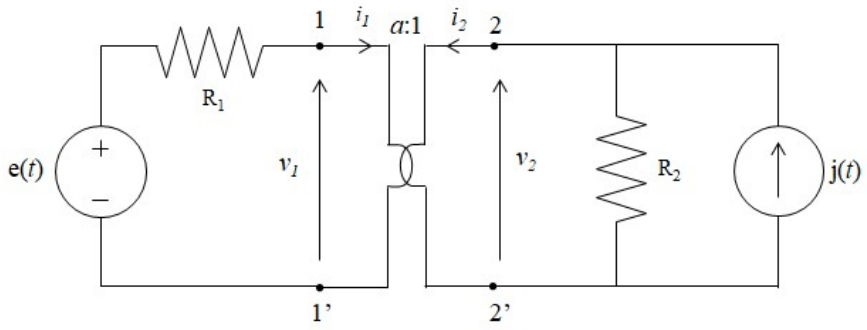



*Fig. 11.12 – Circuito con trasformatore ideale.*

Con le convenzioni fissate, l'equazione di Kirchhoff al nodo presente nella seconda porta è:

$$i_2(t) = j_2(t) - \frac{v_2(t)}{R_2} \tag{11.26}$$

Sostituendo nella (11.26), le relazioni caratteristiche (11.11) del trasformatore ideale otteniamo:

$$-ai_1(t) = \mathrm{j}_2(t) - \frac{v_1(t)}{a\mathrm{R}_2} \tag{11.27}$$

da cui otteniamo:

$$i_1(t) = -\frac{\mathrm{j}_2(t)}{a} + \frac{v_1(t)}{a^2\mathrm{R}_2} \tag{11.28}$$

Pertanto, il bipolo equivalente visto dalla porta 1-1', cioè dal primario del trasformatore, è equivalente al bipolo riportato in Fig. 11.13.

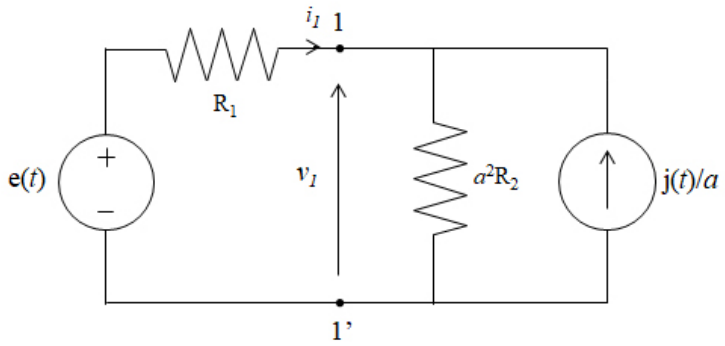



*Fig. 11.13 – Circuito di Fig. 11.12 con trasporto al primario.*

Quanto abbiamo appena visto possiamo estenderlo a qualsiasi sotto–circuito collegato al secondario del trasformatore. Possiamo trasportare il sotto–circuito sostituendo ad ogni bipolo il suo equivalente secondo le formule:

$$\begin{aligned} &\mathrm{R}_{eq} = a^2\mathrm{R}; \\ &\mathrm{e}_{eq}(t) = a\mathrm{e}(t) \\ &\mathrm{j}_{eq}(t) = \frac{\mathrm{j}(t)}{a} \end{aligned} \tag{11.29}$$

Per circuiti a-dinamici, e:

$$\begin{aligned}
&\dot{Z}_{eq} = a^2\dot{Z} \;\Rightarrow\; L_{eq}=a^2L;\; C_{eq}=\frac{C}{a^2}\\
&\overline{E}_{eq} = a\overline{E}\\
&\overline{J}_{eq} = \frac{\overline{J}}{a}
\end{aligned} \qquad (11.30)$$

per circuiti dinamici a regime sinusoidale nel dominio dei fasori.

Ma c'è di più. La direzione del trasporto di impedenza, cioè dal secondario al primario non è unica. Possiamo trasportare un'impedenza o un generatore dal primario al secondario, e in generale qualsiasi sotto–circuito. In questo caso dobbiamo invertire l'operatore del trasporto e quindi dovremmo utilizzare un fattore moltiplicativo a'=1/a. Come esempio, in Fig. 11.14 abbiamo rappresentato il circuito di Fig. 11.12 dove abbiamo portato il primario al secondario.

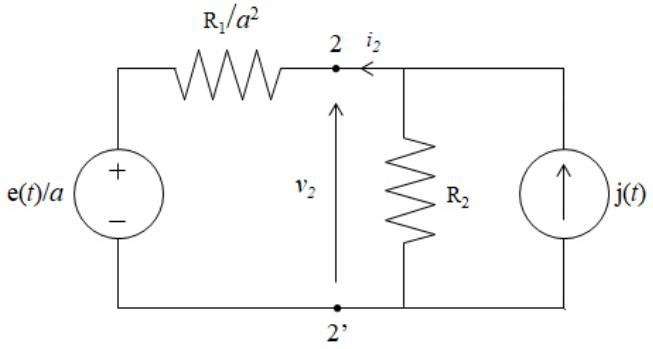



*Fig. 11.14 – Circuito di Fig. 11.12 con trasporto al secondario.*

In sintesi, quando trasportiamo un sotto–circuito dal primario al secondario applichiamo le formule:

$$\begin{aligned}
&R_{eq} = \frac{R}{a^2};\\
&e_{eq}(t) = \frac{e(t)}{a}\\
&j_{eq}(t) = aj(t)
\end{aligned} \qquad (11.31)$$

per circuiti a–dinamici, e:

$$\begin{aligned}
&\dot{Z}_{eq} = \frac{\dot{Z}}{a^2} \;\Rightarrow\; L_{eq} = \frac{L}{a^2};\; C_{eq} = a^2 C \\
&\overline{E}_{eq} = \frac{\overline{E}}{a} \\
&\overline{J}_{eq} = a\overline{J}
\end{aligned} \tag{11.32}$$

per circuiti dinamici a regime sinusoidale nel dominio dei fasori.

Facciamo attenzione al fatto che il primario del trasformatore ideale ci viene indicato dall'espressione "*a*:1" che troviamo in alto al simbolo del trasformatore. Il primario corrisponde alla porta dove si incontra la *a* della espressione "*a*:1". Potrebbe accadere di incontrare in un circuito un trasformatore il cui simbolo è quello di Fig. 11.15? In questo caso il primario sarà alla porta secondaria del doppio bipolo e il secondario alla porta primaria, e tutte le espressioni per il trasporto vanno invertite.

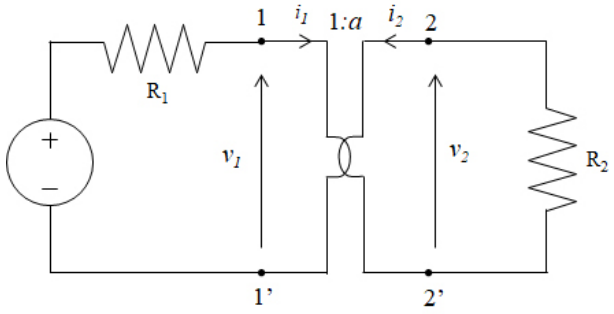



*Fig. 11.15 – Trasformatore ideale impiegato in un circuito.*

Abbiamo mostrato, ad esempio, nella Fig. 11.16, come possiamo trasportare il generatore reale di tensione posto al secondario del trasformatore (alla porta primaria del doppio bipolo), al primario del trasformatore (alla porta secondaria del doppio bipolo).

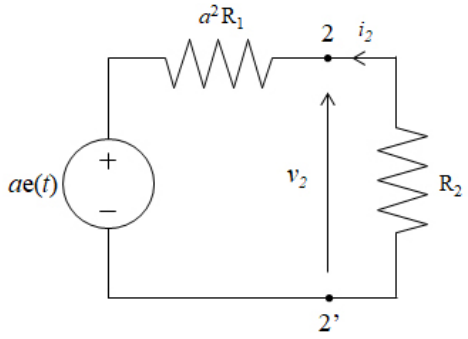



*Fig. 11.16 – Circuito equivalente al circuito di Fig. 11.15.*

## *2.1.2 Esercizio: circuito con trasformatore*

Il circuito in Fig. 11.17 opera in regime sinusoidale. Determinare il valore della potenza attiva assorbita dal resistore $R_3$.

$j(t) = \sqrt{2}\,J\cos(\omega t)$, J = 20 A, $R_1$ = 20 Ω, $R_2$ = 2 Ω, $R_3$ = 100 Ω, L = 0.5 mH, C = 0.25 mF, $a$ = 0.2, ω = 20 krad/s.

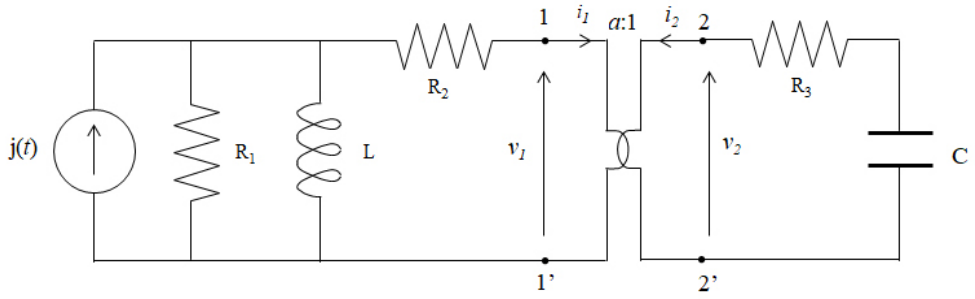



*Fig. 11.17 – Circuito con trasformatore ideale.*

Cominciamo a calcolare il valore delle due reattanze:

$$X_L = \omega L = 10\ \Omega,\ X_C = -\frac{1}{\omega C} = -0{,}2\ \Omega \qquad (11.33)$$

Poi, scegliendo di trasformare il coseno per la rappresentazione dei fasori, in modo che sia:

$$j(t)=20\sqrt{2}\cos(\omega t) \Rightarrow \bar{J}=J=20A \tag{11.34}$$

La potenza $P_{R3}$ assorbita dal resistore $R_3$ può essere espressa in funzione di $\bar{I}_1$ o di $\bar{I}_2$

$$P_{R3} = R_3 \, I_2^2 = a^2 R_3 \, I_1^2 \tag{11.35}$$

essendo, come è ben noto, le due correnti legate dalla relazione $\bar{I}_1 = -\frac{\bar{I}_2}{a}$ introdotta nella (11.11).

Riportando dal secondario al primario del trasformatore il resistore $R_3$ e la reattanza $X_C$, la rete si semplifica come indicato in Fig. 11.18.

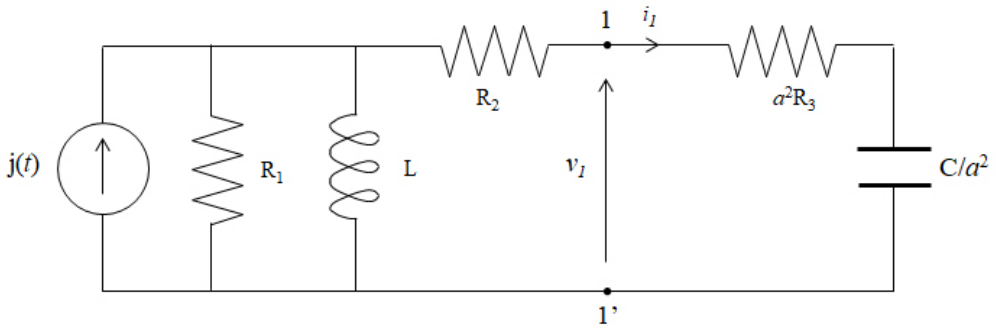



*Fig. 11.18 – Circuito equivalente a quello di Fig. 11.17 con secondario al primario.*

Consideriamo le seguenti impedenze equivalenti:

$$R_{eq} = R_2 + a^2 R_3 = 6\Omega \tag{11.36}$$

$$\dot{Z}_1 = \frac{R_1 jX_L}{R_1 + jX_L} = (4 + j8)\Omega \tag{11.37}$$

$$\dot{Z}_2 = R_{eq} + ja^2 X_C = (6 - j0.008)\Omega \tag{11.38}$$

La corrente $\bar{I}_1$ può essere calcolata adoperando la regola del partitore di corrente:

$$\bar{I}_1 = \frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2}\bar{J} = 12.68 + j5.86 \text{ A} \qquad (11.39)$$

e, di conseguenza, la potenza attiva assorbita dal resistore $R_3$ sarà:

$$P_{R3} = R_3 I_2^2 = a^2 R_3 I_1^2 = 780.5 \text{ W}. \qquad (11.40)$$

😊

## *2.1.3 Esercizio: l'adattamento in potenza di un carico**

Si consideri il circuito illustrato in Fig. 11.19, che schematizza nel modo più semplice possibile l'alimentazione di un "utilizzatore" schematizzato da un resistore $R_c$ da parte di un generatore reale di tensione con tensione generata E e resistenza interna $R_i$.

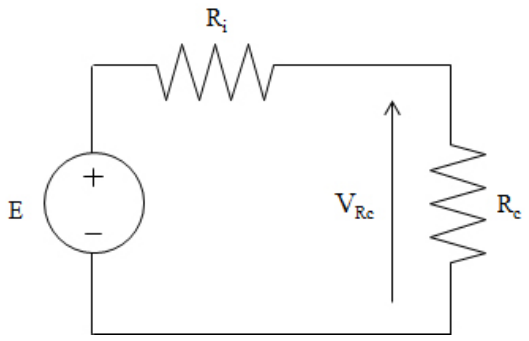



*Fig. 11.19 – Circuito da adattare in potenza.*

Fissate tutte le grandezze del circuito, e introdotta la tensione $V_{Rc}$ sul resistore $R_c$, è immediato andare a valutare la potenza assorbita dall'utilizzatore $R_c$, diciamola $P_c$:

$$P_c = \frac{V_{Rc}^2}{R_c} = \frac{R_c}{\left(R_c + R_i\right)^2} E^2 = \frac{1}{R_i} \frac{R_c/R_i}{\left(1 + R_c/R_i\right)^2} E^2 \qquad (11.41)$$

Per la legge di conservazione della potenza derivata dal teorema di Tellegen, possiamo scrivere che:

$$P_E = P_i + P_c \tag{11.42}$$

dove $P_E$ è la potenza erogata dal generatore di tensione ideale, $P_i$ è la potenza dissipata dal resistore $R_i$. E' facile calcolare le potenze $P_E$ e $P_i$ come segue:

$$P_E = E\frac{E}{R_c + R_i} = \frac{E^2}{R_c + R_i} = \frac{E^2/R_i}{1 + R_c/R_i} \tag{11.43}$$

$$P_i = R_i \frac{E^2}{\left(R_c + R_i\right)^2} = \frac{E^2/R_i}{\left(1 + R_c/R_i\right)^2} \tag{11.44}$$

Ed è immediato verificare che la (11.42) è verificata.

La potenza $P_c$ della (11.41), ma anche le $P_E$ e $P_i$, è funzione del rapporto tra i valori di $R_c$ e $R_i$. Il massimo della potenza $P_c$ della (11.41), si ha per $R_c = R_i$ e vale:

$$P_{c\,max} = \frac{E^2}{4R_i} \tag{11.45}$$

In questo caso, la potenza $P_E$ del generatore e quella dissipata dalla resistenza $P_i$ sono:

$$P_{i\,max} = \frac{E^2}{4R_i}; P_{E\,max} = \frac{E^2}{2R_i} \tag{11.46}$$

Al fine di massimizzare la potenza assorbita dall'utilizzatore bisognerebbe quindi realizzare la condizione $R_c = R_i$. Molto spesso però questa non può essere realizzata a causa della costituzione fisica dei due sistemi che sono assegnati.

Cosa è possibile fare in questi casi?

È evidente che serve a poco aggiungere un altro resistore in serie o in parallelo all'utilizzatore perché la potenza assorbita sarebbe in parte dissipata dal resistore che viene aggiunto dando, quindi, un risultato non economico.

Piuttosto, con il metodo dell'***adattamento in potenza*** di un carico, è possibile modificare la resistenza dell'utilizzatore, vista dal generatore reale, senza alterarne la

costituzione fisica e senza "dissipare" ulteriore potenza, utilizzando un trasformatore ideale. Ricordiamo che il trasformatore ideale è trasparente alla potenza, cioè non dissipa potenza al suo interno. Pertanto, l'impiego del trasformatore nel circuito di Fig. 11.19, non comporta la dissipazione di ulteriore potenza.

A tale scopo, si interponga tra il generatore reale di tensione e l'utilizzatore un trasformatore ideale, avente rapporto di trasformazione *a*, così come illustrato in Fig. 11.20.

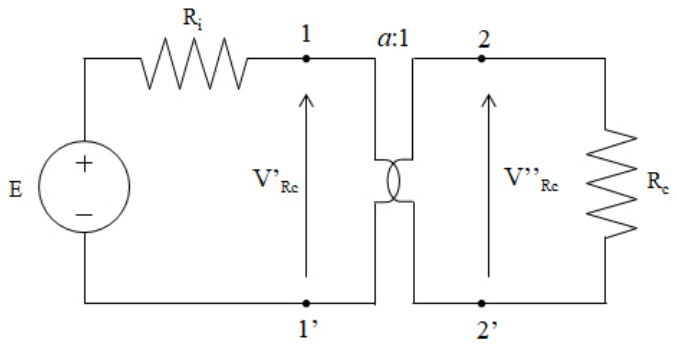



*Fig. 11.20 – Adattamento in potenza con un trasformatore ideale.*

In riferimento alla Fig. 11.20, come abbiamo fatto per calcolare l'espressione (11.41), si ottiene l'espressione della potenza dissipata, chiamiamola $P_c^*$ dal resistore $R_c$:

$$P_c^* = \frac{\left(V_{Rc}^{''}\right)^2}{R_c} = \frac{\left(V_{Rc}^{'}/a\right)^2}{R_c} = \frac{1}{R_i}\frac{a^2 R_c/R_i}{\left(1+a^2 R_c/R_i\right)^2}E^2 \qquad (11.47)$$

dove $V_{Rc}^{''}$ e $V_{Rc}^{'}$ sono rispettivamente le tensioni sul secondario e sul primario del trasformatore ideale di Fig. 11.20 e dove abbiamo sfruttato la relazione (11.11): $V_{Rc}^{''} = V_{Rc}^{'}/a$ .

La potenza $P_c^*$, appena calcolata, assorbita dal trasformatore con al secondario il resistore $R_c$, la possiamo calcolare anche trasportando al primario del trasformatore la resistenza $R_c$ e ottenendo una resistenza equivalente $a^2R_c$ vista dal generatore reale come abbiamo mostrato in Fig. 11.21. Con semplici calcoli si ottiene l'espressione (11.47).

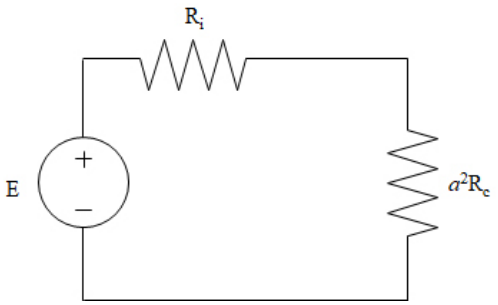



*Fig. 11.21 – Circuito equivalente al circuito di Fig. 11.20.*

Calcoliamo anche la potenza erogata dal generatore ideale, diciamola $P_E$*, e quella dissipata sul resistore $R_i$, diciamola $P_i$* per il circuito di Fig. 11.21:

$$P_E^* = E\frac{E}{a^2R_c + R_i} = \frac{E^2}{a^2R_c + R_i} = \frac{E^2/R_i}{1 + a^2R_c/R_i} \tag{11.48}$$

$$P_i^* = R_c\frac{E^2}{\left(a^2R_c + R_i\right)^2} = \frac{E^2/R_i}{\left(1 + a^2R_c/R_i\right)^2} \tag{11.49}$$

Possiamo mostrare anche in questo caso che la legge di conservazione (11.42) e verificata. La presenza del coefficiente *a*, introduce una possibilità di controllo sul valore della potenza trasferita al carico $P_c$*. In particolare, la potenza $P_c$* espressa dalla (11.47) si può rendere massima agendo sul rapporto di trasformazione *a* che dovrebbe soddisfare la seguente relazione:

$$a = \sqrt{\frac{R_i}{R_c}} \tag{11.50}$$

In questo caso è possibile ottenere il massimo della potenza trasferita al carico pari alla (11.45). Le potenze del generatore e del resistore $R_i$ saranno le (11.46).

Osserviamo che, poiché tipicamente $R_c > R_i$, c'è bisogno di utilizzare un trasformatore con $|a| < 1$.

## 2.2 Il trasformatore reale*

Passiamo ad introdurre il ***trasformatore reale***. Cominciamo col dare una breve descrizione del sistema fisico costituito da due ***induttori accoppiati***.

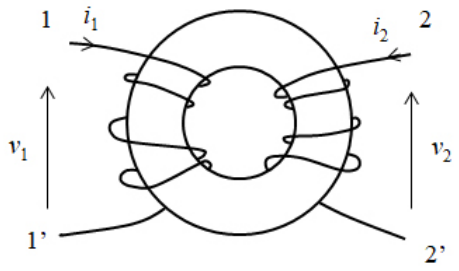



*Fig. 11.22 – Induttori accoppiati.*

In Fig. 11.22 abbiamo avvolto due conduttori su un pezzo di materiale ferromagnetico di forma toroidale realizzando due ***avvolgimenti*** costituiti da un certo numero di ***spire***, diciamole $N_1$ e $N_2$. Questo oggetto si comporta come un doppio bipolo, in quanto soddisfa la richiesta che le correnti ai morsetti esterni indipendenti siano solo due. Infatti, abbiamo una corrente alla porta 1-1' (porta primaria del doppio bipolo) e un'altra corrente alla porta 2-2' (porta secondaria del doppio bipolo). Al pari del trasformatore ideale, diciamo che alla porta primaria del doppio bipolo abbiamo l'avvolgimento primario, e alla porta secondaria del doppio bipolo abbiamo l'avvolgimento secondario del trasformatore reale.

Cerchiamo ora la relazione caratteristica di questo doppio bipolo.

Immaginiamo, per il momento, di non specificare come ho realizzato gli avvolgimenti; immaginiamo di poter fissare il verso delle tensioni e delle correnti e di non conoscere l'interno del sistema. In presenza delle due correnti è noto che concatenato con ognuno dei due avvolgimenti sarà prodotto un campo magnetico che sarà la sovrapposizione di quello prodotto da ognuna delle due correnti $i_1(t)$ e $i_2(t)$. Associato al campo magnetico esistente all'interno degli avvolgimenti c'è un ***flusso magnetico*** $\Phi(t)$. Per l'avvolgimento primario chiamiamo tale flusso $\Phi_1(t)$, per l'avvolgimento secondario $\phi_2$. Osserviamo che i flussi $\Phi_1(t)$ e $\Phi_2(t)$ consistono nella sovrapposizione di un termine

relativo al campo prodotto dalla corrente $i_1(t)$ e di un termine relativo al campo prodotto dalla corrente $i_2(t)$, ossia:

$$\Phi_1(t) = \Phi_{11}(t) \pm \Phi_{12}(t) \tag{11.51}$$

$$\Phi_2(t) = \pm \Phi_{21}(t) + \Phi_{22}(t) \tag{11.52}$$

dove $\Phi_{11}(t)$ rappresenta il flusso relativo al campo prodotto dalla corrente $i_1(t)$ che si concatena con l'avvolgimento primario, $\Phi_{12}(t)$ rappresenta il flusso relativo al campo prodotto dalla corrente $i_2(t)$ che si concatena con l'avvolgimento primario, $\Phi_{21}(t)$ rappresenta il flusso relativo al campo prodotto dalla corrente $i_1(t)$ che si concatena con l'avvolgimento secondario, $\Phi_2(t)$ rappresenta il flusso relativo al campo prodotto dalla corrente $i_2(t)$ che si concatena con l'avvolgimento secondario.

Dobbiamo chiarire il motivo per il quale ai termini di mutua induzione abbiamo considerato un segno positivo o negativo. La scelta tra i due segni dipende dal fatto che il flusso $\Phi_{12}(t)$, ad esempio, nella (11.51) si può sommare al flusso $\Phi_{11}(t)$ se il verso del campo prodotto dalla corrente $i_2(t)$ si concatena con l'avvolgimento primario nello stesso verso con cui si concatena il flusso auto–indotto (questo accade nella Fig. 11.22). Se invece consideriamo la Fig. 11.23, dove abbiamo avvolto il conduttore al secondario in modo contrario, dobbiamo sottrarre i flussi mutuamente indotti.

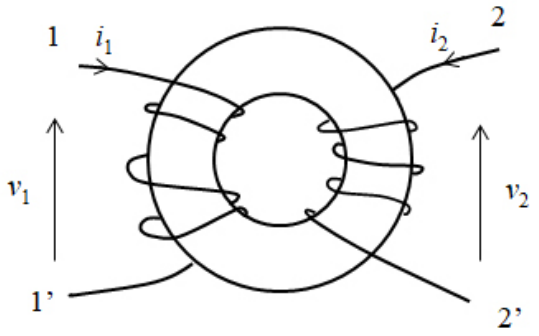



*Fig. 11.23 – Induttori accoppiati con avvolgimento secondario avvolto al contrario di quello di Fig. 11.22.*

Per sintetizzare quanto abbiamo poc'anzi descritto, possiamo considerare la Tabella 11.2.

| Fig. 11.22 | Fig. 11.23 |
|---|---|
| $\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12}$<br>$\Phi_2 = \Phi_{21} + \Phi_{22}$ | $\Phi_1 = \Phi_{11} - \Phi_{12}$<br>$\Phi_2 = -\Phi_{21} + \Phi_{22}$ |

*Tabella 11.2– Cosa è*

Vogliamo ora introdurre le tensioni alle due porte del doppio bipolo trasformatore, per poi individuare le relazioni caratteristiche che legano le 4 grandezze $i_1(t)$, $i_2(t)$, $v_1(t)$ e $v_2(t)$.

Dalla legge Faraday – Neuman – Lenz, possiamo scrivere che:

$$v_1(t) = \frac{\mathrm{d}\Phi_1(t)}{\mathrm{d}t} \tag{11.53}$$

$$v_2(t) = \frac{\mathrm{d}\Phi_2(t)}{\mathrm{d}t} \tag{11.54}$$

dove le tensioni sono quelle rappresentate in Fig. 11.22. In questo caso il segno positivo che compare nelle (11.53) e (11.54), dipende dai versi delle tensioni e delle correnti e da come ho avvolto il conduttore.

Per determinare una caratterizzazione di questo particolare doppio bipolo abbiamo bisogno di una relazione funzionale tra le correnti $i_1(t)$, $i_2(t)$ e le tensioni $v_1(t)$ e $v_2(t)$. A tale scopo sappiamo che esiste una relazione di proporzionalità tra flussi e correnti che producono il campo relativo al flusso stesso. La relazione è di semplice proporzionalità.

Scriviamo, sempre facendo riferimento alla Fig. 11.22, per i segni dei flussi mutui concatenati:

$$\begin{cases} \Phi_1(t)=\Phi_{11}(t)+\Phi_{12}(t)=L_1 i_1(t)+M_{12} i_2(t) \\ \Phi_2(t)=\Phi_{21}(t)+\Phi_{22}(t)=M_{21} i_1(t)+L_2 i_2(t) \end{cases} \tag{11.55}$$

Dalle (11.53) e (11.54), utilizzando le (11.55), possiamo scrivere la relazione caratteristica del trasformatore, si ha che:

$$\begin{cases} v_1(t)=\dfrac{d\Phi_1(t)}{dt}=L_1\dfrac{di_1(t)}{dt}+M_{12}\dfrac{di_2(t)}{dt} \\ v_2(t)=\dfrac{d\Phi_2(t)}{dt}=M_{21}\dfrac{di_1(t)}{dt}+L_2\dfrac{di_2(t)}{dt} \end{cases} \tag{11.56}$$

dove abbiamo considerati costanti i coefficienti $L_1$, $L_2$ e $M_{12}$ e $M_{21}$.

Per quanto riguarda le proprietà delle relazioni caratteristiche (11.56), grazie alla proprietà di reciprocità derivante dal teorema di Reciprocità introdotto nel § 5 della Lezione 10, si può dimostrare che:

$$M_{21}=M_{12}=M \tag{11.57}$$

Pertanto le relazioni (11.56) diventano:

$$\begin{cases} v_1(t)=\dfrac{d\Phi_1(t)}{dt}=L_1\dfrac{di_1(t)}{dt}+M\dfrac{di_2(t)}{dt} \\ v_2(t)=\dfrac{d\Phi_2(t)}{dt}=M\dfrac{di_1(t)}{dt}+L_2\dfrac{di_2(t)}{dt} \end{cases} \tag{11.58}$$

I coefficienti $L_1$ e $L_2$ rappresentano delle vere e proprie induttanze, le ***auto induttanze***, mentre il coefficiente di ***mutua induttanza*** M rappresenta il rapporto tra il flusso concatenato con un avvolgimento e la corrente esistente nell'altro avvolgimento che produce il campo relativo al flusso considerato.

È chiaro che se avessi usato gli avvolgimenti come in Fig. 11.23 avrei scritto:

$$\begin{cases} v_1(t) = \mathrm{L}_1 \dfrac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t} - \mathrm{M}\dfrac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} \\ v_2(t) = -\mathrm{M}\dfrac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t} + \mathrm{L}_2\dfrac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} \end{cases} \tag{11.59}$$

Nella teoria dei circuiti l'accoppiamento mutuo e quindi il cosiddetto trasformatore, ha le relazioni caratteristiche (11.58) o (11.59) e si indica con il simbolo rappresentato in Fig. 11.24 o Fig. 11.25. Tale simbolo è uguale a quello di Fig. 11.6 tranne che per la presenza di due punti posizionati in modo affiancato e non, che vengono utilizzati per indicare se nelle relazioni devono essere usati segni positivi come nelle (11.58), oppure segni negativi come nelle (11.59). La scelte delle une o delle altre viene pertanto indicata dalla cosiddetta ***convenzione del punto*** come tra breve decsriveremo.

Partiamo da porci la seguente domanda: se non conosco come sono avvolti all'interno del trasformatore gli avvolgimenti chi mi dice se devo utilizzare il segno positivo o negativo? Ci viene in aiuto la convenzione del punto che possiamo così enunciare:

*avendo fatto su entrambe le porte la convenzione dell'utilizzatore, il coefficiente M ha segno positivo se i due punti sono affiancati, al contrario è negativo se non sono affiancati.*

Allora per la Fig. 11.24 dobbiamo scrivere le equazioni (11.58), mentre per la Fig. 11.25 dobbiamo scrivere le equazioni (11.59).

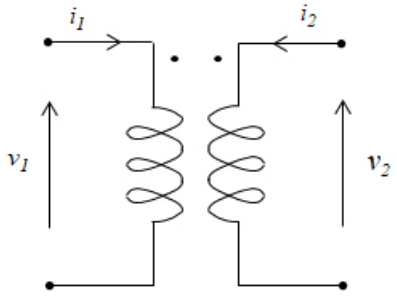



*Fig. 11.24 – Simbolo del trasformatore reale con relazioni caratteristiche (11.58).*

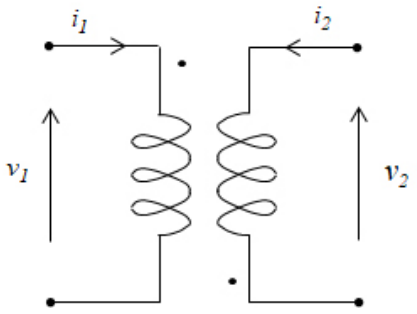



*Fig. 11.25 – Simbolo del trasformatore reale con relazioni caratteristiche (11.59).*

In generale nel trasformatore vi è del flusso disperso che non riesce a concatenarsi con la spira accoppiata a quella in cui circola la corrente che lo produce. In questo caso possiamo affermare che:

$$M \leq \sqrt{L_1 L_2} \tag{11.60}$$

Come conseguenza nel trasformatore si introduce il ***coefficiente di accoppiamento*** k:

$$0 \leq k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \leq 1 \tag{11.61}$$

Quanto più si riesce a realizzare un accoppiamento "perfetto", privo di flusso disperso, tanto più il valore di k si avvicina ad 1. Nel caso in cui questo sia possibile possiamo affermare che:

$$M = \sqrt{L_1 L_2} \Rightarrow \frac{L_1}{M} = \frac{M}{L_2} \tag{11.62}$$

Quando è verificata la condizione (11.62) si dice che l'***accoppiamento* è *perfetto***. In questo caso possiamo dire che il flusso totale, sia auto che mutuo, che si concatena con le singole spire dell'avvolgimento primario è uguale al flusso che si concatena con le singole spire dell'avvolgimento secondario e viceversa. Possiamo cioè scrivere:

$$\Phi_1(t) = N_1 \Phi(t); \quad \Phi_2(t) = N_2 \Phi(t) \tag{11.63}$$

dove $\Phi(t)$ rappresenta appunto il flusso concatenato con le singole spire di entrambi gli avvolgimenti. Dalla (11.63) ricaviamo che:

$$\frac{\Phi_1(t)}{\Phi_2(t)} = \frac{\mathrm{N}_1}{\mathrm{N}_2} = a \tag{11.64}$$

dove abbiamo introdotto il coefficiente $a$. Abbiamo posto uguale ad una costante il rapporto tra le spire al primario ed al secondario. Dalle (11.53) e (11.54) possiamo ricavare che:

$$\frac{v_1(t)}{v_2(t)} = \frac{\mathrm{N}_1}{\mathrm{N}_2} = a \tag{11.65}$$

Abbiamo così ritrovato la relazione caratteristica delle tensioni, nella (11.11), del trasformatore ideale! Cosa dire delle correnti? In un trasformatore reale, anche se ad accoppiamento perfetto (vale la (11.62)) non risulta verificata la relazione caratteristica delle correnti, nella (11.11), del trasformatore reale. Vediamo, dunque, cosa accade alla relazione caratteristica delle correnti nel trasformatore reale ad accoppiamento perfetto.

Per prima cosa osserviamo che

$\mathrm{M} \propto \mathrm{N}_1\mathrm{N}_2$, $\mathrm{L}_1 \propto \mathrm{N}_1^2$ e $\mathrm{L}_2 \propto \mathrm{N}_2^2$, ed inoltre essendo verificata la (11.62), si ha dalla (11.65):

$$\frac{\mathrm{L}_1}{\mathrm{M}} = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{L}_2} = a \tag{11.66}$$

quindi il rapporto di trasformazione del trasformatore ideale dipende dai coefficienti di auto e mutua induzione del trasformatore.

Il trasformatore ideale è una idealizzazione di un sistema fisico reale che al massimo può essere idealizzato come perfetto. Il trasformatore ideale ha senso introdurlo in quanto, come vedremo nel prossimo paragrafo, serve a disegnare uno schema equivalente del trasformatore reale ad accoppiamento perfetto da utilizzare nel modello circuitale.

### *2.2.1 Lo schema circuitale equivalente di un trasformatore reale*

Esiste la possibilità di utilizzare uno ***schema equivalente*** del trasformatore ad accoppiamento perfetto che usa il trasformatore ideale e un induttore, vediamo come.

Mettendo in evidenza l'induttanza $L_1$ nella prima delle (11.58), otteniamo la seguente equazione

$$v_1(t) = L_1\left(\frac{di_1(t)}{dt} + \frac{M}{L_1}\frac{di_2(t)}{dt}\right) \tag{11.67}$$

Poi mettendo in evidenza la mutua induttanza M nella seconda della (11.58):

$$v_2(t) = M\left(\frac{di_1(t)}{dt} + \frac{L_2}{M}\frac{di_2(t)}{dt}\right) \tag{11.68}$$

Dividendo, ora membro a membro le equazioni (11.67) e (11.68), otteniamo, utilizzando la (11.66):

$$\frac{v_1(t)}{v_2(t)} = \frac{L_1}{M} = a \tag{11.69}$$

Lo stesso risultato potevamo trovarlo partendo dalla equazione (11.59); in questo caso avremmo scritto:

$$\frac{v_2(t)}{v_1(t)} = -\frac{L_2}{M} = -\frac{1}{a} \tag{11.70}$$

In conclusione, come abbiamo già sottolineato, abbiamo trovato che il trasformatore reale ha, per le tensioni, la stessa relazione (11.11) del trasformatore ideale.

Vediamo cosa accade alle correnti. Osserviamo che la prima relazione caratteristica del sistema (11.58) la possiamo scrivere, utilizzando la (11.66) e mettendo in evidenza l'operatore di derivata:

$$v_1(t) = \mathrm{L}_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left( i_1(t) + \frac{1}{a} i_2(t) \right) = \mathrm{L}_1 \frac{\mathrm{d}i_1'(t)}{\mathrm{dt}} \tag{11.71}$$

dove abbiamo posto:

$$i_1'(t) = i_1(t) + \frac{1}{a} i_2(t) \tag{11.72}$$

Introducendo la corrente:

$$i_1''(t) = -\frac{1}{a} i_2(t) \tag{11.73}$$

possiamo scrivere:

$$i_1(t) = i_1'(t) + i_1''(t) \tag{11.74}$$

Dalla (11.74) ricaviamo che la corrente del primario è costituita da due contributi: la corrente $i_1'(t)$, che in virtù della (11.71) è quella che circola nell'induttore $\mathrm{L}_1$ e $i_1''(t)$ che, in virtù della (11.73) e della seconda delle (11.11), è quella di un primario di un trasformatore ideale. È evidente che lo schema equivalente di un trasformatore ad accoppiamento perfetto è quello rappresentato in Fig. 11.26. In tale figura è facile verificare che nel nodo indicato con un punto in evidenza verifica la LKC della (11.74).

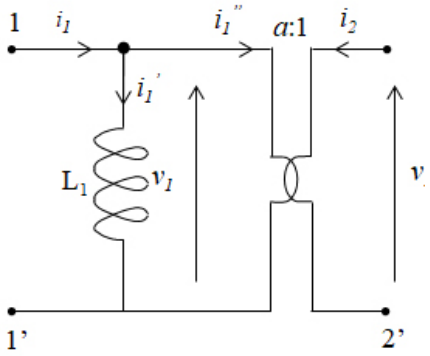



*Fig. 11.26 – Schema equivalente di un trasformatore ad accoppiamento perfetto.*

Ripercorrendo lo stesso ragionamento ma partendo dalla seconda equazione della (11.58) saremmo giunti ad individuare lo schema equivalente di Fig. 11.27 che è, a sua volta, equivalente a quello di Fig. 11.26.

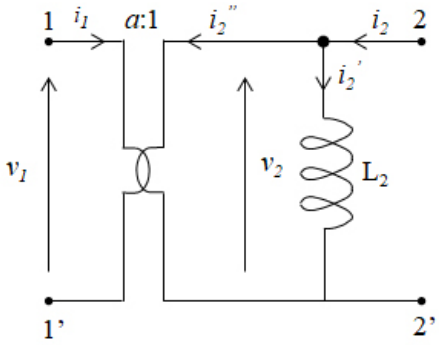



*Fig. 11.27 – Schema equivalente di un trasformatore ad accoppiamento perfetto.*

I due schemi equivalenti di Fig. 11.26 e Fig. 11.27 usano, come avevamo anticipato, un trasformatore ideale e un induttore, rispettivamente di induttanza $L_1$ e $L_2$. Un trasformatore reale ad accoppiamento perfetto non è un trasformatore ideale.

Prima di concludere vogliamo menzionare il fatto che anche per un trasformatore reale (ad accoppiamento non perfetto) si può utilizzare uno schema circuitale equivalente che utilizza un trasformatore ideale. In questo caso più generale si utilizzano due induttori, uno posto in parallele ad una delle due porte, come visto nel caso dell'accoppiamento perfetto, e uno posto in serie alla stessa porta dove scegliamo di mettere quello in parallelo.

Il trasformatore, che abbiamo introdotto nei precedenti paragrafi, trova largo impiego in questi sistemi di distribuzione. Nel prossimo paragrafo descriveremo come.

## 2.3 Il trasformatore nelle linee di trasporto ad alta tensione

In riferimento al § 1, consideriamo le linee di distribuzione dell'energia elettrica. In Fig. 11.3 abbiamo mostrato come una linea monofase è descritta da un modello circuitale in regime sinusoidale. Nel § 3 vedremo quale è il modello circuitale per sistemi di tipo trifase. Come abbiamo ampiamente anticipato nei sistemi di distribuzione vengono largamente impiegati i trasformatori che sono essenziali per la trasmissione di energia a

grande distanza, resa praticabile dall'innalzamento ad alte tensioni grazie ai trasformatori come vedremo nel presente paragrafo. In particolare, il trasformatore viene usato nel passaggio dal sistema di produzione alla linea di trasporto e, in maniera inversa, dalla linea di trasporto alle utenze finali (industriali e domestiche).

In Fig. 11.28 consideriamo il modello circuitale di un sistema di distribuzione monofase in regime sinusoidale.

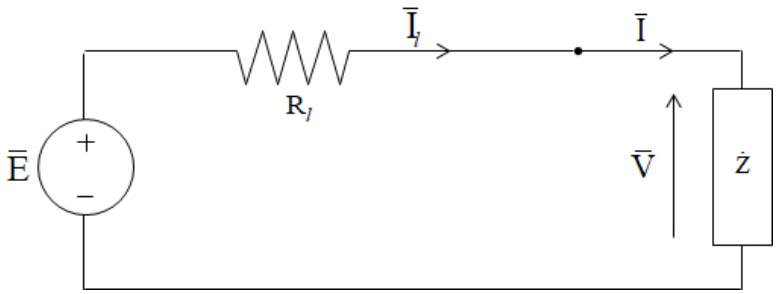



*Fig. 11.28 – Sistema di distribuzione di energia elettrica nel modello circuitale con linea monofase.*

In Fig. 11.29 abbiamo mostrato come i trasformatori vengono inseriti nel sistema di distribuzione dell'energia. Un trasformatore viene utilizzato a monte della linea di trasporto e a valle.

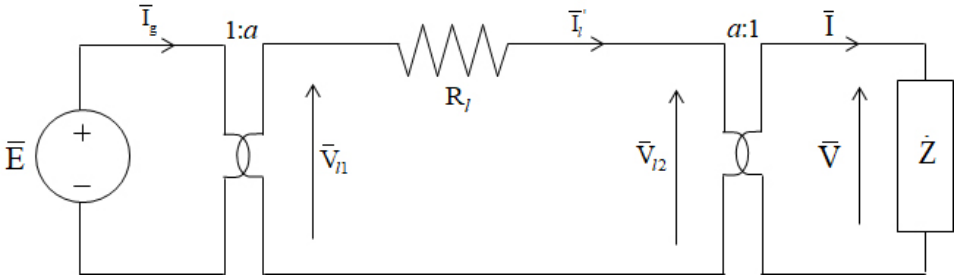



*Fig. 11.29 – Modello circuitale del sistema di trasporto di energia elettrica ad alta tensione con sistema monofase.*

Vediamo perché si utilizzano e perché vengono collocati nelle posizioni indicate. In riferimento al sistema di Fig. 11.28, a parità di potenza attiva assorbita dal carico P, come nel caso del rifasamento di un carico (vedi § 1.2.2), si cercherà di dissipare la

minore potenza lungo la linea $P_l$. Tale potenza, dovuta all'effetto Joule, è (vedi la (11.6)):

$$P_l = R_l I_l^2 \tag{11.75}$$

dove $I_l$ è il modulo del fasore della corrente della linea di trasmissione e quindi il valore efficace[8].

Inoltre, possiamo scrivere il bilancio di potenze attive:

$$P = Re\left\{\overline{V}\,\overline{I}^*\right\} = Re\left\{\overline{E}\,\overline{I}_l^*\right\} - RI_l^2 \tag{11.76}$$

Abbiamo scritto, nella (11.76), che la potenza assorbita da carico è uguale alla potenza generata dal generatore meno la potenza dissipata lungo la linea. Per diminuire la potenza dissipata lungo la linea, possiamo diminuire il valore efficace della corrente lungo la linea. Per fare questo possiamo introdurre due trasformatori, uno a monte e uno a valle della linea di trasporto in maniera da poter trasmettere la stessa potenza attiva al carico ma con basse correnti ed elevate tensioni. I trasformatori dovranno agire in maniera contrapposta e questo si evince dal simbolo 1:*a* sul trasformatore in ingresso alla linea e *a*:1 su quello in uscita.

Vediamo come. Scegliendo un $a>>0$, il primo trasformatore, come quello di Fig. 11.7(b), alza le tensioni e abbassa le correnti inducendo nella linea una corrente a basso valore efficace. Utilizzando le (11.16) scriviamo:

$$\overline{V}_{l1} = a\overline{E} \tag{11.77}$$

$$-\overline{I}_l' = -\frac{\overline{I}_g}{a} \Rightarrow \overline{I}_l' = \frac{\overline{I}_g}{a} \tag{11.78}$$

[8] Abbiamo considerato, e lo faremo anche nei sistemi trifase del § 3, che i fasori sono ottenuti con i valori efficaci e non con i valori massimi delle sinusoidi.

dove il segno negativo al primo membro è dovuto al fatto che al primario del trasformatore abbiamo scelto un verso per la corrente opposto a quello della Fig. 11.7(b).

Il secondo trasformatore, come quello di Fig. 11.7(a), abbassa le tensioni ed alza le correnti grazie alle seguenti equazioni (vedi le (11.15)):

$$\overline{\mathrm{V}}_{l2} = a\overline{\mathrm{V}} \tag{11.79}$$

$$-\overline{\mathrm{I}}_l' = -\frac{1}{a}\overline{\mathrm{I}} \Rightarrow \overline{\mathrm{I}}_l' = \frac{1}{a}\overline{\mathrm{I}} \tag{11.80}$$

dove il segno negativo al primo membro è dovuto al fatto che al secondario del trasformatore abbiamo scelto un verso per la corrente opposto a quello della Fig. 11.7(a).

Ricordiamo che, in base alle (11.14), il trasformatore è trasparente alle potenze. Utilizzando le (11.77), (11.78), (11.79) e (11.80), possiamo quindi scrivere, analogamente alla (11.76) un bilancio di potenze:

$$\mathrm{P} = Re\left\{\overline{\mathrm{V}}\,\overline{\mathrm{I}}^*\right\} = Re\left\{\overline{\mathrm{V}}_{l2}\,\overline{\mathrm{I}}_l'^*\right\} = Re\left\{\overline{\mathrm{V}}_{l1}\,\overline{\mathrm{I}}_l'^*\right\} - \mathrm{R}\mathrm{I}_l'^2 = Re\left\{\overline{\mathrm{E}}\,\overline{\mathrm{I}}_g^*\right\} - \mathrm{R}\mathrm{I}_l'^2 \tag{11.81}$$

La (11.81) ci mostra come è possibile fornire al carico C una data potenza attiva P diminuendo la potenza dissipata nella resistenza $\mathrm{R}_l$ (lungo la linea): la $\mathrm{R}\mathrm{I}_l'^2$; e quindi diminuendo la potenza erogata dal generatore (prodotta dalle centrali di produzione): $Re\left\{\overline{\mathrm{E}}\,\overline{\mathrm{I}}_g^*\right\}$.

In conclusione, abbiamo fatto vedere come utilizzando un trasformatore ideale in ingresso alla linea di trasporto e in uscita, sia possibile diminuire le perdite lungo la linea e quindi diminuire la potenza necessaria prodotta, il tutto lasciando inalterato il valore della potenza attiva fornita al carico.

## 3 I sistemi trifase

*Fig. 11.30 – Un'immagine suggestiva di una linea di distribuzione trifase.*

Fino ad ora abbiamo trattato sistemi di distribuzione monofase in cui comparivano delle singole sorgenti sinusoidali (i generatori di tensione incontrati sin qui sono tutti dei generatori monofase). In realtà, al giorno d'oggi, la maggior parte dell'energia elettrica che utilizziamo viene prodotta e distribuita attraverso dei sistemi trifase come quello che abbiamo mostrato in maniera schematica all'inizio della Lezione nella Fig. 11.2. In questa figura abbiamo considerato il caso in cui il trifase viene realizzato giustapponendo i tre monofasi in maniera da avere tre ***fasi*** e un solo ***neutro***. In questo caso si dice che il sistema trifase è con neutro. È evidente che per questa configurazione c'è un risparmio di materiale dovuto all'eliminazione di due conduttori neutri. In questo paragrafo introdurremo i sistemi trifase senza neutro, dove anche il neutro che possiamo osservare in Fig. 11.2 viene eliminato. Ciò è reso possibile, come vedremo tra breve, perché si utilizzano dei generatori trifase che non prevedono l'esistenza di un conduttore neutro.

Nei sistemi trifase senza neutro, tre generatori monofase sinusoidali ed isofrequenziali con un certo sfasamento tra le tensioni da essi erogate vengono collegati a stella come in Fig. 11.31 o a triangolo, come in Fig. 11.32. I ***generatori trifase*** risultano più efficienti

di quelli monofase perché si riduce di molto il peso dei conduttori e degli altri componenti a parità di potenza distribuita. A ciò bisogna aggiungere che mentre la potenza generata da un sistema monofase è per sua stessa natura oscillante (come visto nella (9.3) della Lezione 9), un sistema trifase può garantire un trasferimento di potenza costante. Come vedremo a breve, un generatore trifase che produce tre tensioni bilanciate, ossia aventi lo stesso modulo e sfasate tra loro di 120°, ha la capacità di fornire una potenza istantanea costante.

Prima di descrivere con un maggiore grado di dettaglio i diversi sistemi trifase, introduciamo un paio di concetti preliminari facendo riferimento alla Fig. 11.31 e Fig. 11.32.

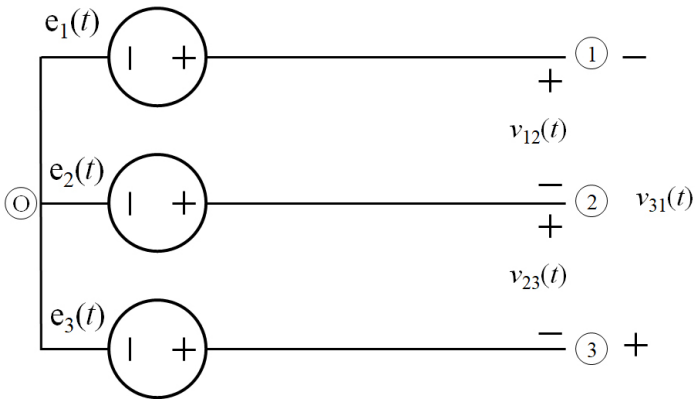



*Fig. 11.31 – Circuito equivalente di un generatore trifase a stella.*

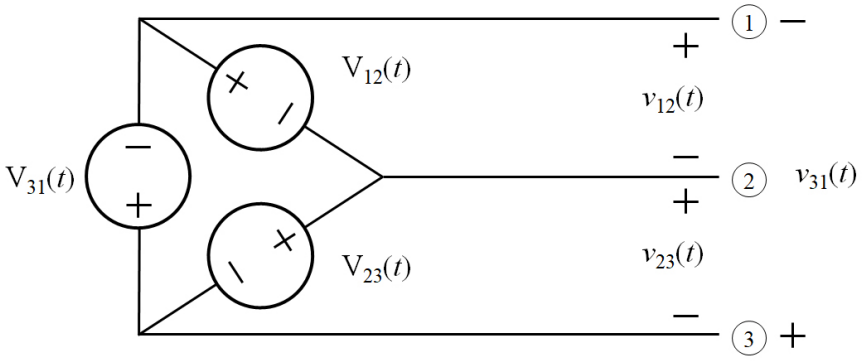



*Fig. 11.32 – Circuito equivalente di un generatore trifase a triangolo.*

Nella Fig. 11.31, le tensioni dei generatori $e_1(t)$, $e_2(t)$ ed $e_3(t)$ non sono nient'altro che i potenziali dei nodi 1, 2 e 3 se assumiamo come riferimento il nodo 0. Tali tensioni prendono il nome di ***tensioni stellate*** del generatore trifase. Diversamente, le tre tensioni $v_{12}(t)$, $v_{23}(t)$ e $v_{31}(t)$ si definiscono ***tensioni concatenate***. Esse sono così correlate:

$$v_{12}(t)=e_1(t)-e_2(t); \qquad v_{23}(t)= e_2(t)-e_3(t); \qquad v_{31}(t)= e_3(t)-e_1(t) \tag{11.82}$$

Le tre tensioni stellate sono tra loro indipendenti mentre quelle concatenate non sono indipendenti tra loro. Applicando la LKT alla maglia formata dalle tre tensioni concatenate, dovrà essere infatti:

$$v_{12}(t) + v_{23}(t) + v_{31}(t) = 0 \tag{11.83}$$

per ogni valore di $t$.

Per quanto riguarda il sistema di Fig. 11.32, possiamo notare che in questo caso le tre tensioni del generatore, che sono concatenate, non sono indipendenti valendo ancora la LKT:

$$V_{12}(t) + V_{23}(t) + V_{31}(t) = 0 \tag{11.84}$$

Ed inoltre si avrà che le tensioni concatenate, $v_{12}(t)$, $v_{23}(t)$ e $v_{31}(t)$ saranno uguali a quelle erogate dai generatori.

Se siamo in regime sinusoidale i sistemi di Fig. 11.31 e Fig. 11.32 si chiamano ***generatori sinusoidali trifase***. Essi non sono altro che due ***tripoli*** rispettivamente con una configurazione a stella o a triangolo.

Sin qui ci siamo concentrati sul solo generatore di un sistema trifase. Immaginiamo ora di connettere tale generatore trifase ad un tripolo utilizzatore, costituito per semplicità da una terna di bipoli (caratterizzati dalle impedenze $\dot{Z}_1$, $\dot{Z}_2$ e $\dot{Z}_3$) connessi a stella. Abbiamo rappresentato tale situazione in Fig. 11.33.

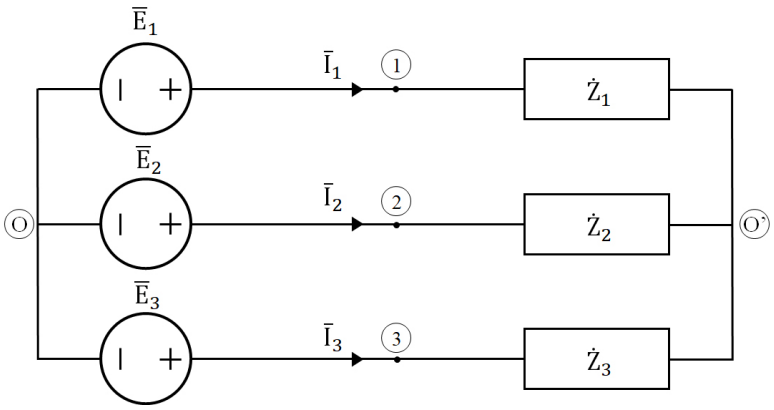



*Fig. 11.33 – Sistema trifase con generatore ed utilizzatore a stella.*

Il sistema descritto avrà soltanto due nodi: il nodo O e il nodo O'. In tali nodi possiamo considerare i fasori del potenziale di nodo, chiamiamoli $\bar{\Phi}_O$ e $\bar{\Phi}_{O'}$. Ricordandoci di avere l'arbitrio di porre a zero uno dei potenziali del circuito, poniamo uguale a zero il potenziale del nodo O: $\bar{\Phi}_O = 0$. Questo nodo è quello in comune ai tre generatori.

A questo punto possiamo ricorrere al metodo dei potenziali di nodo, introdotto nel § 5 della Lezione 3, ottenendo:

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 &= \frac{\bar{E}_1 - \bar{\Phi}_{O'}}{\dot{Z}_1} \\ \bar{I}_2 &= \frac{\bar{E}_2 - \bar{\Phi}_{O'}}{\dot{Z}_2} \\ \bar{I}_3 &= \frac{\bar{E}_3 - \bar{\Phi}_{O'}}{\dot{Z}_3} \end{aligned} \qquad (11.85)$$

In cui $\bar{\Phi}_{O'}$ è il potenziale del centro stella del sistema utilizzatore. Applicando a tale nodo la LKC, dovrà risultare:

$$\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 0 \qquad (11.86)$$

Sostituendo nella (11.86), le (11.85), otteniamo l'espressione dell'unico potenziale incognito $\bar{\Phi}_{O'}$:

$$\overline{\Phi}_{O'} = \frac{\frac{\overline{E}_1}{\dot{Z}_1} + \frac{\overline{E}_2}{\dot{Z}_2} + \frac{\overline{E}_3}{\dot{Z}_3}}{\frac{1}{\dot{Z}_1} + \frac{1}{\dot{Z}_2} + \frac{1}{\dot{Z}_3}} \tag{11.87}$$

Osserviamo che tale espressione coincide con la formula di Millman già incontrata § 2.3 della Lezione 8.

In generale i valori delle tensioni del generatore trifase e i valori delle impedenze del carico trifase sono qualsiasi. In tal caso i valori delle correnti (11.85) non hanno una relazione significativa tra loro anche se devono soddisfare la (11.86) e il potenziale al nodo O' avrà un dato valore non nullo come dalla (11.87). Nel prossimo paragrafo studieremo un caso particolare ma significativo in cui le tensioni del generatore trifase e le impedenze del carico trifase godono di una certa simmetria dando luogo a proprietà di un certo rilievo.

Un'ultima osservazione, in relazione alla Fig. 11.33, consiste nel fatto che è significativo considerare il generatore trifase (che è un tripolo) a stella e il carico trifase (che è un tripolo) a stella, in quanto possiamo sempre immaginare di ricondurre attraverso trasformazioni basate sul principio di equivalenza introdotto nella lezione 4, trasformate qualsiasi generatore e qualsiasi carico in uno equivalente a stella.

## 3.1 I sistemi trifase simmetrici ed equilibrati

Possiamo definire il *generatore sinusoidale trifase* ***simmetrico*** di tensione se le ***tensioni stellate*** o ***tensioni di linea*** risultano essere:

$$\begin{aligned} e_1(t) &= E_m \cos(\omega t+\alpha) \\ e_2(t) &= E_m \cos(\omega t+\alpha-2\pi/3) \\ e_3(t) &= E_m \cos(\omega t+\alpha-4\pi/3) \end{aligned} \tag{11.88}$$

E di conseguenza, i loro fasori rappresentativi risultano essere:

$$\overline{E}_1 = E_{eff} e^{j\alpha} \tag{11.89}$$

$$\overline{\mathrm{E}}_2 = \mathrm{E}_{\mathrm{eff}} \mathrm{e}^{j\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right)}$$

$$\overline{\mathrm{E}}_3 = \mathrm{E}_{\mathrm{eff}} \mathrm{e}^{j\left(\alpha - \frac{4\pi}{3}\right)}$$

In cui abbiamo adoperato i valori efficaci anziché le ampiezze per i fasori.

Se il generatore è simmetrico, e cioè se valgono le (11.89), per le tensioni stellate vale la proprietà che la loro somma è nulla. Si ha infatti che:

$$\overline{\mathrm{E}}_1 + \overline{\mathrm{E}}_2 + \overline{\mathrm{E}}_3 = 0 \tag{11.90}$$

e quindi nel dominio del tempo risulterà anche che:

$$\mathrm{e}_1(t) + \mathrm{e}_2(t) + \mathrm{e}_3(t) = 0 \tag{11.91}$$

Passando, ora, alle tensioni concatenate, risulta:

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{V}}_{12} &= \overline{\mathrm{E}}_1 - \overline{\mathrm{E}}_2 = \sqrt{3}\overline{\mathrm{E}}_1 \mathrm{e}^{j\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}\mathrm{E}_{\mathrm{eff}} \mathrm{e}^{j\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)} \\
\overline{\mathrm{V}}_{23} &= \overline{\mathrm{E}}_2 - \overline{\mathrm{E}}_3 = \sqrt{3}\overline{\mathrm{E}}_2 \mathrm{e}^{j\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}\mathrm{E}_{\mathrm{eff}} \mathrm{e}^{j\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)} \\
\overline{\mathrm{V}}_{31} &= \overline{\mathrm{E}}_3 - \overline{\mathrm{E}}_1 = \sqrt{3}\overline{\mathrm{E}}_3 \mathrm{e}^{j\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}\mathrm{E}_{\mathrm{eff}} \mathrm{e}^{j\left(\alpha + \frac{5\pi}{6}\right)}
\end{aligned} \tag{11.92}$$

Di ciò è semplice convincersi osservando il diagramma fasoriale (vedi § 1.4 della Lezione 8) mostrato in Fig. 11.34 dove abbiamo rappresentato la terna di tensioni stellate e quella di tensioni concatenate. Utilizzando questo strumento grafico è facile convincersi che il fasore di ogni tensione concatenata si può ottenere grazie alla proiezione, sul fasore stesso, del fasore della tensione stellata. Osserviamo che l'angolo tra, ad esempio, $\overline{\mathrm{E}}_1$ e $\overline{\mathrm{V}}_{12}$ è pari a $\pi/6$. Pertanto, lo sfasamento tra i due fasori è pari a tale angolo e che il modulo del fasore $\overline{\mathrm{V}}_{12}$ è pari al doppio del modulo del fasore $\overline{\mathrm{E}}_1$ moltiplicato per il coseno di tale angolo pari a $\sqrt{3}/2$.

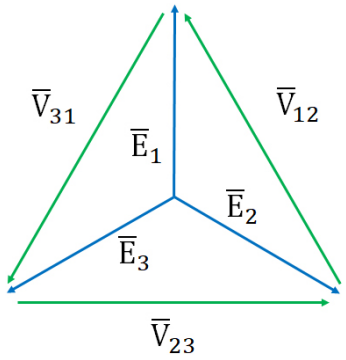



*Fig. 11.34 – Diagramma fasoriale delle tensioni stellate e concatenate per un sistema trifase simmetrico diretto.*

È importante specificare che in Fig. 11.34 sono riportati i fasori rappresentativi delle tensioni stellate e di quelle concatenate per il caso di ***generatore trifase simmetrico diretto***. Da tale figura è possibile comprendere il significato della definizione di "terna simmetrica diretta" attribuita sia alle tensioni stellate che a quelle concatenate. Il termine "diretto", infatti, fornisce un'indicazione sulla circostanza secondo la quale il fasore $\overline{E}_1$ (rispettivamente $\overline{V}_{12}$) è in anticipo rispetto al fasore $\overline{E}_2$ ($\overline{V}_{23}$) così come il fasore $\overline{E}_2$ ($\overline{V}_{23}$) è in anticipo rispetto al fasore $\overline{E}_3$ ($\overline{V}_{31}$) mentre l'aggettivo "simmetrico" ci dice che lo sfasamento tra i fasori è di $2\pi/3$.

A seconda del valore delle impedenze, avremo due possibili casi:

1) $\dot{Z}_1$, $\dot{Z}_2$ e $\dot{Z}_3$ sono diverse tra loro

In tal caso l'utilizzatore risulta ***squilibrato*** e non vi è alcun legame particolare tra i fasori rappresentativi delle tre correnti che interessano il carico.

2) $\dot{Z}_1$, $\dot{Z}_2$ e $\dot{Z}_3$ sono uguali tra loro

In tal caso l'utilizzatore si definisce ***equilibrato*** e questo è l'unico caso che illustreremo in dettaglio in questo corso. In sostanza, ponendo $\dot{Z}_1 = \dot{Z}_2 = \dot{Z}_3 = \dot{Z}$, essendo per la (11.90), $\overline{E}_1 + \overline{E}_2 + \overline{E}_3 = 0$, risulterà dalla (11.87):

$$\overline{\Phi}_{O'} = \frac{\frac{\overline{E}_1}{\dot{Z}} + \frac{\overline{E}_2}{\dot{Z}} + \frac{\overline{E}_3}{\dot{Z}}}{\frac{1}{\dot{Z}} + \frac{1}{\dot{Z}} + \frac{1}{\dot{Z}}} = \overline{E}_1 + \overline{E}_2 + \overline{E}_3 = 0 \tag{11.93}$$

e di conseguenza dalle (11.85):

$$\begin{aligned} \overline{I}_1 &= \frac{\overline{E}_1}{\dot{Z}} \\ \overline{I}_2 &= \frac{\overline{E}_2}{\dot{Z}} \\ \overline{I}_3 &= \frac{\overline{E}_3}{\dot{Z}} \end{aligned} \tag{11.94}$$

Dalle (11.94) ricaviamo quanto avremmo potuto ottenere con una LKC al nodo O':

$$\overline{I}_1 + \overline{I}_2 + \overline{I}_3 = \frac{\overline{E}_1}{\dot{Z}} + \frac{\overline{E}_2}{\dot{Z}} + \frac{\overline{E}_3}{\dot{Z}} = \frac{1}{\dot{Z}}\left(\overline{E}_1 + \overline{E}_2 + \overline{E}_3\right) = 0 \tag{11.95}$$

Scrivendo, dunque, l'impedenza nella sua forma esponenziale $\dot{Z} = Ze^{j\varphi}$ possiamo riscrivere le (11.94) come:

$$\begin{aligned} \overline{I}_1 &= \frac{E_{eff}}{Z} e^{j(\alpha-\varphi)} \\ \overline{I}_2 &= \frac{E_{eff}}{Z} e^{j\left(\alpha-\varphi-\frac{2\pi}{3}\right)} \\ \overline{I}_3 &= \frac{E_{eff}}{Z} e^{j\left(\alpha-\varphi-\frac{4\pi}{3}\right)} \end{aligned} \tag{11.96}$$

Le cui espressioni nel dominio del tempo diventano:

$$\begin{aligned} i_1(t) &= \frac{E_M}{Z}\cos\left(\omega t + \alpha - \varphi\right) \\ i_2(t) &= \frac{E_M}{Z}\cos\left(\omega t + \alpha - \varphi - \frac{2\pi}{3}\right) \\ i_3(t) &= \frac{E_M}{Z}\cos\left(\omega t + \alpha - \varphi - \frac{4\pi}{3}\right) \end{aligned} \tag{11.97}$$

Allorquando le tre impedenze sono uguali, dunque, le tre correnti costituiscono anche esse una ***terna simmetrica diretta***. In tal caso si dice che il sistema trifase è equilibrato e l'utilizzatore è un utilizzatore "equilibrato", come già anticipato. Sottolineiamo che, in

assenza del neutro, la somma dei tre fasori della corrente è nulla indipendentemente dal fatto che il carico sia equilibrato o meno come ci dice la (11.86).

In riferimento al diagramma fasoriale di Fig. 11.34, possiamo ora introdurre anche i fasori delle correnti (11.96) come rappresentato in Fig. 11.35. In tale diagramma abbiamo rappresentato l'angolo $\varphi$ in giallo.

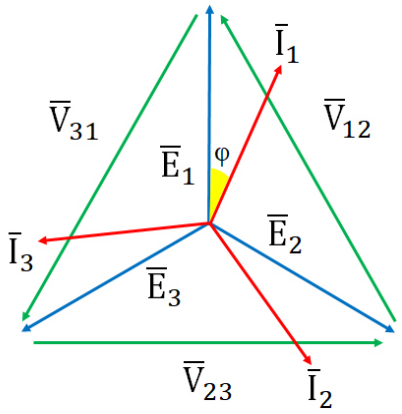



*Fig. 11.35 – Diagramma fasoriale delle tensioni stellate e concatenate e delle correnti per un sistema trifase simmetrico diretto ed equilibrato.*

Si noti, infine, che le tre correnti che avremmo se i due nodi O e O', i cosiddetti ***centri stella***, fossero collegati per mezzo di un corto circuito come abbiamo illustrato in Fig. 11.36 sarebbero:

$$\begin{aligned} \overline{I}_1 &= \frac{\overline{E}_1}{\dot{Z}_1} \\ \overline{I}_2 &= \frac{\overline{E}_2}{\dot{Z}_2} \\ \overline{I}_3 &= \frac{\overline{E}_3}{\dot{Z}_3} \end{aligned} \qquad (11.98)$$

Tali correnti diventano le (11.94) nel caso in cui le tre impedenze del carico sono uguali. Ovviamente non sarà più valida la (11.95) e nel conduttore si potrebbe osservare una corrente non nulla.

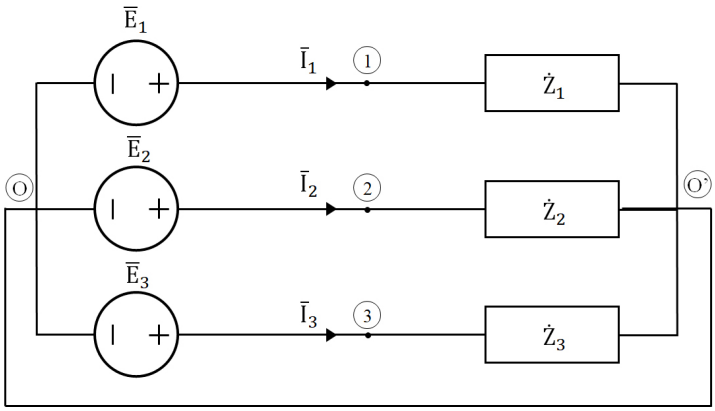



*Fig. 11.36 – Sistema trifase con neutro.*

Il conduttore del corto circuito del modello circuitale di figura non è nient'altro che il conduttore neutro e pertanto il sistema di figura viene indicato come ***sistema trifase con neutro***.

In conclusione, nel caso di terna simmetrica equilibrata abbiamo che le correnti soddisfano la (11.95) in presenza e in assenza di neutro. Al contrario se il sistema dovesse essere non equilibrato, la (11.95) non è soddisfatta e si osserva una corrente non nulla nel conduttore neutro quando questo è presente.

## 3.2 La potenza nei sistemi trifase simmetrici ed equilibrati

Vogliamo ora illustrare una proprietà notevole relativa alla potenza dei sistemi trifase simmetrici ed equilibrati. Per fare ciò, partiamo dal calcolo della potenza istantanea fornita dal generatore trifase equilibrato all'utilizzatore. Poiché tale generatore non è nient'altro che un tripolo, una volta che sia stata fatta la convenzione del generatore sui tre generatori di tensione, la potenza da esso erogata sarà:

$$p(t) = e_1(t)i_1(t) + e_2(t)i_2(t) + e_3(t)i_3(t) \tag{11.99}$$

Ricordando poi le espressioni (11.88) per le tensioni di un generatore simmetrico e le (11.97) per le correnti di un carico equilibrato, risulterà, dopo alcuni calcoli:

$$\begin{aligned} p(t) = & \frac{E_{eff}^2}{Z}\left[\cos(\varphi) + \cos(2\omega t + 2\alpha - \varphi)\right] + \\ & + \frac{E_{eff}^2}{Z}\left[\cos(\varphi) + \cos\left(2\omega t + 2\alpha - \varphi - \frac{4\pi}{3}\right)\right] + \\ & + \frac{E_{eff}^2}{Z}\left[\cos(\varphi) + \cos\left(2\omega t + 2\alpha - \varphi - \frac{8\pi}{3}\right)\right] \end{aligned} \tag{11.100}$$

Si può verificare che la somma dei tre termini sinusoidali a pulsazione 2ω è identicamente nulla. Questo si può vedere facilmente se ai tre termini si associa una terna simmetrica di fasori sfasati di 4π/3. Quindi la potenza istantanea erogata dal generatore trifase è costante nel tempo, avendo espressione:

$$p(t) = 3\frac{E_{eff}^2}{Z}\cos(\varphi) \tag{11.101}$$

La potenza istantanea erogata da un generatore trifase simmetrico in presenza di un carico equilibrato (sistema di correnti equilibrato) è costante in regime sinusoidale. Abbiamo dunque mostrato, per il caso considerato, uno dei vantaggi dei sistemi trifase accennati all'inizio di questa sezione: *la potenza erogata dall'alternatore trifase è costante nel tempo*[9]! In questo caso, infatti, la potenza istantanea coincide con quella media ed è uguale alla parte reale della potenza complessa assorbita dall'utilizzatore. Questo è il vantaggio principale di questi sistemi rispetto agli alternatori monofase nei quali, invece, la potenza è variabile nel tempo poiché la potenza istantanea varia periodicamente. Ciò porta a complicazioni costruttive dei diversi elementi per questioni meccaniche.

Osservando l'espressione della potenza istantanea in un sistema simmetrico equilibrato ci accorgiamo anche che essa è pari a tre volte la potenza media (o attiva) di un sistema sinusoidale monofase in cui vi sia un generatore di tensione che fornisca una $E_{eff}$. Un altro vantaggio sostanziale dei sistemi trifase (simmetrici ed equilibrati) rispetto a quelli monofase è, dunque, la capacità di trasportare una certa quantità di potenza con tre soli conduttori! Se avessimo voluto fornire ad un carico la stessa potenza con dei sistemi

[9] L'alternatore è un tipo di generatore detto anche macchina elettrica rotante basata sulla legge fisica dell'induzione elettromagnetica (o di Faraday-Neumann), che converte l'energia meccanica fornita dal motore primo in energia elettrica sotto forma di corrente alternata.

monofase, avremmo avuto bisogno di 3 sistemi in parallelo e quindi di 6 conduttori. Questa circostanza permette di avere con un sistema trifase un risparmio in termini di costi di installazione (abbiamo la metà dei conduttori) e di esercizio (dimezzando la lunghezza totale dei conduttori dimezziamo anche le perdite).

Nel seguito faremo alcune considerazioni riguardo un sistema trifase simmetrico ed equilibrato. Facciamo riferimento al carico trifase equilibrato come quello che abbiamo indicato sinteticamente in Fig. 11.37.

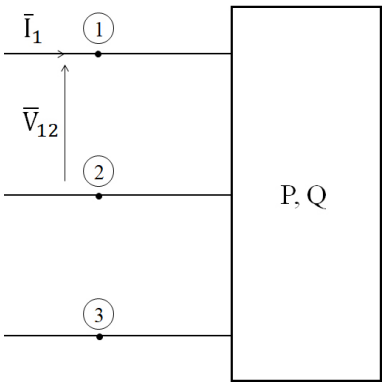



*Fig. 11.37 – Carico trifase equilibrato.*

Dalla (11.101) possiamo scrivere la potenza attiva assorbita dal carico di Fig. 11.37 come:

$$P = 3\frac{E_{eff}^2}{Z}\cos(\varphi) = 3E_{eff}I_{eff}\cos(\varphi) \tag{11.102}$$

Dove abbiamo sostituito l'espressione $I_{eff} = \frac{E_{eff}}{Z}$. Inoltre, la potenza attiva P, può essere scritta anche in altro modo, in funzione del modulo della tensione concatenata, utilizzando le (11.92) in cui si evince $E_{eff} = \frac{V_{eff}}{\sqrt{3}}$:

$$P = \sqrt{3}V_{eff}I_{eff}\cos(\varphi) \tag{11.103}$$

Possiamo scrivere anche l'espressione della potenza reattiva assorbita dal carico trifase:

$$Q = 3E_{eff}I_{eff}\sin(\varphi) = \sqrt{3}V_{eff}I_{eff}\sin(\varphi) \tag{11.104}$$

Dalle (11.103) e (11.104) ricaviamo:

$$I_{eff} = \frac{P}{\sqrt{3}V_{eff}\cos(\varphi)} = \frac{Q}{\sqrt{3}V_{eff}\sin(\varphi)} \tag{11.105}$$

Dalla (11.117) ricaviamo che: una volta che siano note il valore efficace della tensione concatenata $V_{eff}$ (che possiamo ricavare dalla stellata se ci viene assegnata questa), la potenza media nominale P assorbita dal carico, il fattore di potenza $\cos(\varphi)$ ed il segno della potenza reattiva assorbita è possibile determinare la caratteristica di funzionamento dell'utilizzatore trifase equilibrato. Il segno della potenza reattiva ci fornisce indicazioni sul segno dell'angolo $\varphi$. Se conosciamo il valore di $\cos(\varphi)$, essendo il coseno una funzione pari, non riusciamo a risalire al segno dell'angolo.

Avremo inoltre che è possibile, una volta note la potenza media nominale P assorbita dal carico, e la potenza reattiva assorbita dal carico, risalire all'impedenza del carico $\dot{Z} = R + jX$:

$$\varphi = \text{arctg}\left(\frac{Q_{tot}}{P_{tot}}\right)$$

$$R = Re\{\dot{Z}\} = \frac{V_{eff}^2}{P_m}\cos^2(\varphi) \tag{11.106}$$

$$X = Im\{\dot{Z}\} = R\tan(\varphi)$$

### *3.2.1 La misura della potenza nei sistemi trifase simmetrici ed equilibrati*

Nell'ambito dei sistemi trifase risulta molto interessante studiare i metodi di misura della potenza assorbita dal carico trifase. Ne seguito ne introdurremo due: il metodo del ***wattmetro in quadratura*** e il metodo basato sul teorema di Aron, detto ***inserzione Aron***.

Wattmetro in quadratura

Consideriamo il sistema illustrato in Fig. 11.38. Si tratta di un sistema trifase simmetrico ed equilibrato con un wattmetro che misura la potenza (vedi la (9.12) della Lezione 9):

$$W=Re\left\{\bar{V}_{23}\bar{I}_1^*\right\}=I_{eff}V_{eff}\cos(\varphi') \tag{11.107}$$

Osserviamo che $\varphi'$ è l'angolo di sfasamento tra la tensione $\bar{V}_{23}$ e la corrente $\bar{I}_1$. Potremmo osservare che la potenza W (11.107) che ha la forma di una potenza attiva,(11.119) non ha alcun significato fisico in quanto non riguarda la tensione e la corrente di un bipolo. Il wattmetro, infatti, preleva la tensione concatenata con due fasi e la corrente della terza altra fase ed è per questo motivo che si dice ***in quadratura***.

Chiediamoci chi è $\varphi'$ o, meglio, che interpretazione dare a quest'angolo.

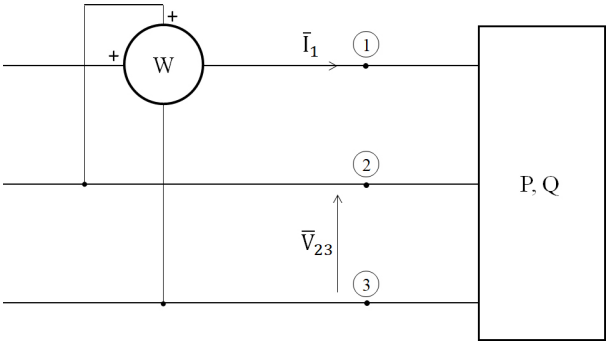



*Fig. 11.38 – Utilizzo di un wattmetro in quadratura per la misura della potenza di un carico trifase.*

A tale scopo utilizziamo un diagramma vettoriale come quello di Fig. 11.35.

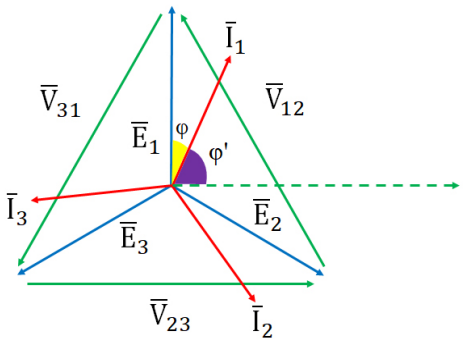



*Fig. 11.39 – Diagramma fasoriale come quello di Fig. 11.35 in cui è indicato in viola l'angolo* $\varphi'$ della *(11.107)*

Dal diagramma di Fig. 11.39 si evince che:

$$|\varphi'| = \left|\varphi - \frac{\pi}{2}\right| \tag{11.108}$$

E quindi la (11.107) diventa:

$$\begin{aligned} W &= V_{eff} I_{eff} \cos(\varphi') = V_{eff} I_{eff} \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= V_{eff} I_{eff} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cos(\varphi) - \sin(\varphi)\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \\ &= V_{eff} I_{eff} \sin(\varphi) = \frac{Q}{\sqrt{3}} \end{aligned} \tag{11.109}$$

dove abbiamo utilizzato la (11.104) per la potenza reattiva Q del carico trifase equilibrato.

Concludiamo che in un sistema trifase simmetrico ed equilibrato, con l'impiego di un unico wattmetro purché in quadratura, è possibile misurare la potenza reattiva del carico trifase grazie alla relazione (11.109). Osserviamo che il wattmetro può essere inserito in una qualsiasi delle tre fasi del sistema, ma necessariamente dobbiamo garantire che sia in quadratura e cioè che l'angolo tra la tensione della voltmetrica e la corrente dell'amperometrica sia quello della (11.108).

Inserzione Aron

Consideriamo il sistema illustrato in Fig. 11.40. Si tratta di un sistema trifase non necessariamente simmetrico ed equilibrato con tre wattmetri che misurano una certa

potenza. Il nodo O'' che possiamo osservare in figura lo abbiamo introdotto in maniera arbitraria ed è libero di essere collocato in qualsiasi nodo del circuito in particolare nel centro stella dei generatori trifase o nel centro stella di un carico equivalente a stella e nonché sul neutro nel caso questo fosse presente.

Dati i fasori efficaci delle tre tensioni stellate $\overline{\mathrm{E}}_1$, $\overline{\mathrm{E}}_2$ e $\overline{\mathrm{E}}_3$ e delle tre correnti di fase $\overline{\mathrm{I}}_1$, $\overline{\mathrm{I}}_2$ e $\overline{\mathrm{I}}_3$ e dato $\overline{\Phi}_{\mathrm{O''}}$ è il fasore del potenziale elettrico nel nodo O'', possiamo considerare la somma delle tre misure (vedi la (9.58) della Lezione 9 per l'espressione della potenza misurata da un wattmetro):

$$\begin{aligned}
&\mathrm{W}_1+\mathrm{W}_2+\mathrm{W}_3= \\
&\quad = Re\left\{\left(\overline{\mathrm{E}}_1-\overline{\Phi}_{\mathrm{O''}}\right)\overline{\mathrm{I}}_1^*\right\}+Re\left\{\left(\overline{\mathrm{E}}_2-\overline{\Phi}_{\mathrm{O''}}\right)\overline{\mathrm{I}}_2^*\right\}+Re\left\{\left(\overline{\mathrm{E}}_3-\overline{\Phi}_{\mathrm{O''}}\right)\overline{\mathrm{I}}_3^*\right\}= \\
&\quad = Re\left\{\overline{\mathrm{E}}_1\overline{\mathrm{I}}_1^*+\overline{\mathrm{E}}_2\overline{\mathrm{I}}_2^*+\overline{\mathrm{E}}_3\overline{\mathrm{I}}_3^*\right\}+Re\left\{\overline{\Phi}_{\mathrm{O''}}\left(\overline{\mathrm{I}}_1+\overline{\mathrm{I}}_2+\overline{\mathrm{I}}_3\right)^*\right\}= \\
&\quad = Re\left\{\overline{\mathrm{E}}_1\overline{\mathrm{I}}_1^*+\overline{\mathrm{E}}_2\overline{\mathrm{I}}_2^*+\overline{\mathrm{E}}_3\overline{\mathrm{I}}_3^*\right\}
\end{aligned} \tag{11.110}$$

La (11.110) l'abbiamo ottenuta sfruttando la linearità dell'operatore *Re* e la condizione (11.86) delle correnti $\overline{\mathrm{I}}_1+\overline{\mathrm{I}}_2+\overline{\mathrm{I}}_3=0$. Quest'ultima condizione, in assenza di neutro, lo ricordiamo, è indipendente dal fatto che il sistema trifase sia simmetrico ed equilibrato.

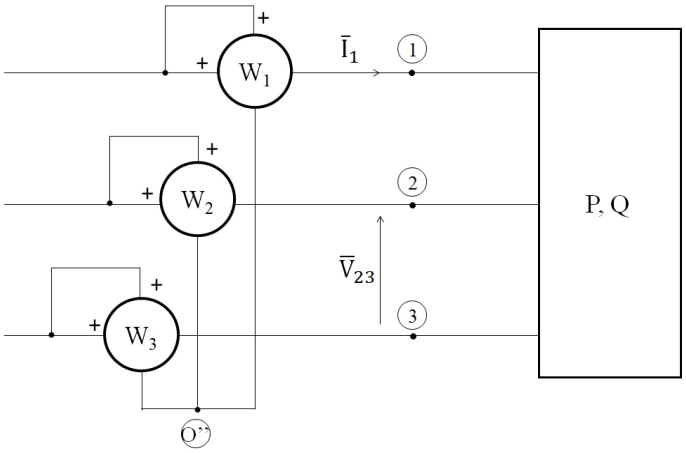



*Fig. 11.40 – Inserzione di tre wattmetri in un sistema trifase simmetrico ed equilibrato.*

Il teorema di Aron afferma che in un sistema trifase (non necessariamente simmetrico ed equilibrato):

- *la somma delle misure dei tre wattmetri è indipendente dal nodo O'' scelto ad arbitrio*
- *la somma delle misure dei tre wattmetri corrisponde alla misura della potenza attiva assorbita dal carico $P_{tot}$*. Se scegliamo il nodo O'' coincidente con il centro stella del carico a stella equivalente allora ogni wattmetro misura la potenza attiva assorbita dal singolo carico corrispondente e quindi la somma della misura corrisponde alla $P_{tot}$.
- *la misura della potenza attiva di un carico trifase può essere fatta utilizzando la somma della misura di SOLI due wattmetri*. Se scegliamo il nodo O'' coincidente con una delle tre fasi, come abbiamo fatto in Fig. 11.41, avremo che la tensione corrispondente al wattmetro che si trova sulla fase dove abbiamo posto il nodo O'' è nulla e, quindi, continuiamo a misurare la potenza attiva assorbita dal carico $P_{tot}$ con solo due wattmetri. In questo caso abbiamo realizzato un'***inserzione Aron***.

In conclusione, l'espressione (11.110) ci restituisce il valore della potenza attiva assorbita dal carico complessivo trifase e tale valore può essere misurato utilizzando l'inserzione Aron di Fig. 11.41 che utilizza solo due wattmetri:

$$W_1+W_2=Re\left\{\bar{E}_1\bar{I}_1^*+\bar{E}_2\bar{I}_2^*+\bar{E}_3\bar{I}_3^*\right\}=Re\left\{\bar{V}_{12}\bar{I}_1^*+\bar{V}_{32}\bar{I}_3^*\right\}=P_{tot} \qquad (11.111)$$

Sottolineiamo che possiamo inserire i due wattmetri arbitrariamente in due delle tre fasi ottenendo altre due espressioni per la potenza attiva assorbita dal carico analoghe alla (11.111).

Se il sistema trifase è simmetrico ed equilibrato la (11.110) possiamo riscriverla come segue:

$$P_{tot}=W_1+W_2=Re\left\{\bar{E}_1\bar{I}_1^*+\bar{E}_2\bar{I}_2^*+\bar{E}_3\bar{I}_3^*\right\}=3E_{eff}I_{eff}\cos(\varphi) \qquad (11.112)$$

che dalla (11.102) sappiamo essere l'espressione della potenza attiva $P_{tot}$ assorbita da un carico trifase simmetrico ed equilibrato.

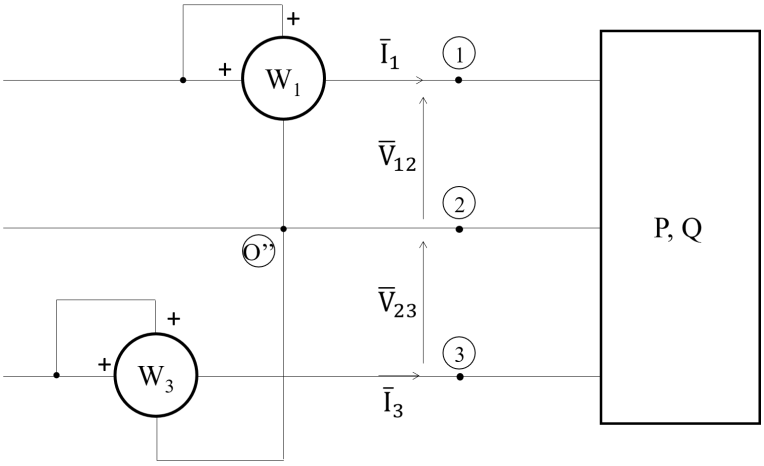



*Fig. 11.41 – Inserzione Aron.*

Nel caso in cui il sistema trifase è simmetrico ed equilibrato possiamo utilizzare l'inserzione Aron anche per misurare la potenza reattiva assorbita dal carico.

Vediamo come. Per la misura della potenza reattiva assorbita dal carico dobbiamo considerare la differenza delle misure dei due wattmetri di Fig. 11.41:

$$W_1 - W_2 = Re\left\{\bar{V}_{12}\bar{I}_1^* - \bar{V}_{32}\bar{I}_3^*\right\} = V_{eff}I_{eff}\cos\left(30°+\varphi\right) - V_{eff}I_{eff}\cos\left(30° - \varphi\right) \qquad (11.113)$$

dove, utilizzando il diagramma fasoriale di Fig. 11.35, abbiamo rappresentato il Fig. 11.42 la posizione dei fasori $\bar{V}_{12}$ e $\bar{I}_1$; $\bar{V}_{32}$ e $\bar{I}_3$ e i loro angoli di sfasamento. In particolare, gli angoli indicati in azzurro sono di 30°.

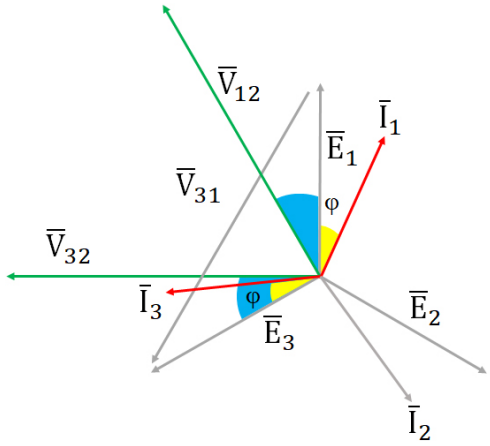



*Fig. 11.42 – Diagramma fasoriale utile alla espressione (11.113).*

L'espressione della misura dei wattmetri (11.113) diventa con qualche calcolo:

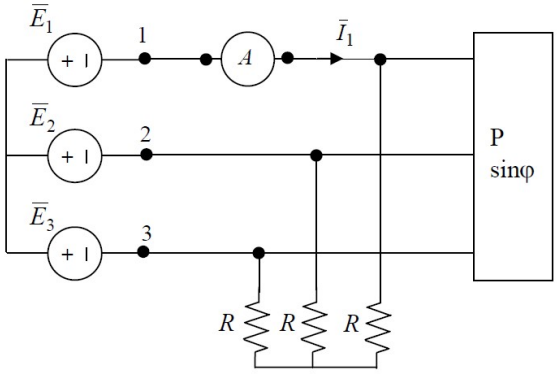
$$\begin{aligned} W_1 - W_2 &= Re\left\{\bar{V}_{12}\bar{I}_1^* - \bar{V}_{32}\bar{I}_3^*\right\} = V_{eff}I_{eff}\cos(30°+\varphi) - V_{eff}I_{eff}\cos(30° - \varphi) = \\ &= V_{eff}I_{eff}\left(\cos(30°)\cos(\varphi) - \sin(30°)\sin(\varphi)\right) + \\ &- V_{eff}I_{eff}\left(\cos(30°)\cos(\varphi) + \sin(30°)\sin(\varphi)\right) = \\ &= -2V_{eff}I_{eff}\sin(30°)\sin(\varphi) = -V_{eff}I_{eff}\sin(\varphi) = -\frac{Q}{\sqrt{3}} \end{aligned} \qquad (11.114)$$

la misura della potenza reattiva assorbita dal carico trifase equilibrato, a meno del coefficiente $-\frac{Q}{\sqrt{3}}$.

In conclusione, con l'inserzione Aron, ossia con soli due wattmetri, si misura la potenza attiva e reattiva assorbita dal carico!

## 3.3 Esercizio: calcolo della corrente di linea di un trifase[10]*

Con riferimento al seguente sistema trifase, alimentato da una terna simmetrica diretta di tensioni, di valore efficace E, valutare l'indicazione dell'amperometro.




$E = 220\,V$
$R = 50\,\Omega$
$P = 12\,kW$
$\sin\varphi = 0.554$
$f = 50$ Hz

L'indicazione dell'amperometro fornisce il valore efficace I della corrente di linea $\mathbf{I}_1$. Per determinare tale valore è preferibile valutare la potenza complessa totale assorbita alla sezione 1-2-3. Il carico a valle dei resistori assorbe la potenza reattiva:

[10] L'esercizio qui proposto fa parte del ciclo di "Esercitazioni" relative al corso "di Elementi di Circuiti Elettrici – 2003/4" tenuto dal Prof. Maffucci. Esso è disponibile in rete al seguente link: http://www.elettrotecnica.unina.it/files/rubinacci/upload/esercizi_sistemi_trifasi.pdf.

$$Q=P\tan(\varphi)=P\tan\left[\sin^{-1}(0.554)\right]=7.99\text{kVar} \tag{11.115}$$

Per valutare la potenza complessa assorbita dalla stella di resistori, basta osservare che tale carico è posto in parallelo rispetto al precedente e che la tensione su ciascun resistore è proprio la tensione stellata dei generatori. Si ha, allora:

$$P_R=3\frac{E^2}{R}=2.90\text{kW};\ Q_R=0 \tag{11.116}$$

Applicando la conservazione delle potenze, possiamo affermare che la potenza complessa totale assorbita alla sezione 1-2-3 è data da:

$$P_{TOT}=P+P_R=14.90\text{kW};\ Q_{TOT}=Q+Q_R=7.99\text{kVAr} \tag{11.117}$$

Cioè:

$$\overline{S}=P_{TOT}+Q_{TOT}=(14.90+j7.99)10^3 \tag{11.118}$$

Ricordando che l'espressione della potenza apparente è:

$$S=\sqrt{P_{TOT}^2+Q_{TOT}^2}=3EI \tag{11.119}$$

Si ha immediatamente che:

$$I=\frac{\sqrt{P_{TOT}^2+Q_{TOT}^2}}{3E}=25.62\text{A} \tag{11.120}$$

😊

## Indice delle figure

Fig. 11.1 – Sistema di trasporto monofase dell'energia elettrica. ..... 3

Fig. 11.2 – Sistema di trasporto trifase dell'energia elettrica. ..... 4

Fig. 11.3 – Sistema di trasporto monofase dell'energia elettrica nel modello circuitale. . 8

Fig. 11.4 – Sistema di trasporto di Fig. 11.3 con carico rifasato. ..... 10

Fig. 11.5 – Sistema di trasporto di Fig. 11.4 con l'indicazione delle correnti. ..... 11

Fig. 11.6 – Simbolo del trasformatore nel modello circuitale. ..... 14

Fig. 11.7 – Simbolo del trasformatore ideale. ..... 16

Fig. 11.8 – Esempio di circuito con trasformatore ideale. ..... 19

Fig. 11.9 – Circuito equivalente a quello di Fig. 11.8 a cui si è utilizzata la proprietà del trasporto d'impedenza. ..... 20

Fig. 11.10 – Circuito con trasformatore ideale. ..... 21

Fig. 11.11 – Circuito di Fig. 11.10 con trasporto al primario. ..... 22

Fig. 11.12 – Circuito con trasformatore ideale. ..... 22

Fig. 11.13 – Circuito di Fig. 11.12 con trasporto al primario. ..... 23

Fig. 11.14 – Circuito di Fig. 11.12 con trasporto al secondario. ..... 24

Fig. 11.15 – Trasformatore ideale impiegato in un circuito. ..... 25

Fig. 11.16 – Circuito equivalente al circuito di Fig. 11.15. ..... 26

Fig. 11.17 – Circuito con trasformatore ideale. ..... 26

Fig. 11.18 – Circuito equivalente a quello di Fig. 11.17 con secondario al primario. ..... 27

Fig. 11.19 – Circuito da adattare in potenza. ..... 28

Fig. 11.20 – Adattamento in potenza con un trasformatore ideale. ..... 30

Fig. 11.21 – Circuito equivalente al circuito di Fig. 11.20. ..... 31

Fig. 11.22 – Induttori accoppiati. ..... 32

Fig. 11.23 – Induttori accoppiati con avvolgimento secondario avvolto al contrario di quello di Fig. 11.22. ..... 33

Fig. 11.24 – Simbolo del trasformatore reale con relazioni caratteristiche (11.58)..... 36

Fig. 11.25 – Simbolo del trasformatore reale con relazioni caratteristiche (11.59)..... 37

Fig. 11.26 – Schema equivalente di un trasformatore ad accoppiamento perfetto. ..... 40

Fig. 11.27 – Schema equivalente di un trasformatore ad accoppiamento perfetto. ..... 41

Fig. 11.28 – Sistema di distribuzione di energia elettrica nel modello circuitale con linea monofase. ..... 42

Fig. 11.29 – Modello circuitale del sistema di trasporto di energia elettrica ad alta tensione con sistema monofase. ..... 42

Fig. 11.30 – Un'immagine suggestiva di una linea di distribuzione trifase..... 45

Fig. 11.31 – Circuito equivalente di un generatore trifase a stella..... 46

Fig. 11.32 – Circuito equivalente di un generatore trifase a triangolo..... 46

Fig. 11.33 – Sistema trifase con generatore ed utilizzatore a stella. ..... 48

Fig. 11.34 – Diagramma fasoriale delle tensioni stellate e concatenate per un sistema trifase simmetrico diretto. ..... 51

Fig. 11.35 – Diagramma fasoriale delle tensioni stellate e concatenate e delle correnti per un sistema trifase simmetrico diretto ed equilibrato. ..... 53

Fig. 11.36 – Sistema trifase con neutro..... 54

Fig. 11.37 – Carico trifase equilibrato. ..... 56

Fig. 11.38 – Utilizzo di un wattmetro in quadratura per la misura della potenza di un carico trifase. ..... 58

Fig. 11.39 – Diagramma fasoriale come quello di Fig. 11.35 in cui è indicato in viola l'angolo $\varphi'$ della (11.107) ..... 59

Fig. 11.40 – Inserzione di tre wattmetri in un sistema trifase simmetrico ed equilibrato. ..... 60

Fig. 11.41 – Inserzione Aron. ..... 62

Fig. 11.42 – Diagramma fasoriale utile alla espressione (11.113). ..... 62

## Domande

### Teoria

#### *Le linee di distribuzione dell'energia elettrica*

11.1 A cosa serve una linea di distribuzione dell'energia elettrica?

#### *Sistemi monofase e sistemi trifase*

11.2 Cosa si intende per "fase" di una linea di distribuzione di energia elettrica monofase?

11.3 Cosa si intende per "neutro" di una linea di distribuzione di energia elettrica monofase?

11.4 Cosa si mette in comune di tre sistemi monofase per realizzare un trifase?

11.5 Quale è il vantaggio di utilizzare un sistema trifase di distribuzione dell'energia invece che diversi monofase?

11.6 Perché per potenze elevate è più conveniente usare un sistema di trasporto di energia trifase anziché monofase?

11.7 Negli impianti industriali che tipo di motori vengono impiegati convenientemente?

11.8 Come sono i costi dei generatori trifase rispetto a quelli monofase?

11.9 Quale è il voltaggio dei sistemi trifase?

11.10 Quale è il voltaggio di un sistema monofase?

11.11 Perché per le utenze domestiche si preferisce utilizzare i sistemi monofase?

11.12 Dove avviene il passaggio tra sistema trifase e sistema monofase?

11.13 Per quale motivo, nei sistemi di distribuzione dell'energia, vengono utilizzati i trasformatori?

11.14 Quale è tipicamente il valore contrattuale della potenza assorbita da un'utenza domestica?

11.15 Quali sono le lunghezze tipiche da considerare per le linee di trasporto dell'energia elettrica?

11.16 Cosa sostiene i conduttori cilindrici di piccola sezione che si impiegano per il trasporto dell'energia elettrica?

11.17 Quali sono i valori tipici in Italia della tensione tra due fasi di un sistema trifase?

11.18 Quali sono i valori tipici in Italia della tensione tra una fase e il neutro di un sistema trifase?

11.19 In quel tipo di regime dinamico funzionano i sistemi monofase e trifase di distribuzione dell'energia?

## *Modello circuitale di un sistema di monofase*

11.20 Come si modella la centrale elettrica in un sistema monofase di distribuzione dell'energia?

11.21 Che tipo di impedenza descrive un carico di una linea di distribuzione dell'energia elettrica?

11.22 Come si descrive nel modello circuitale la linea di trasmissione presente in una rete di distribuzione dell'energia elettrica?

## *Il rifasamento di un carico di una linea di distribuzione monofase*

11.23 Come posso agire su un carico ohmico-induttivo per abbassare il modulo della corrente assorbita, fissata che sia la tensione ai capi del carico?

11.24 Cosa dobbiamo assicurare che rimanga costante quando facciamo il rifasamento di un carico?

11.25 Quale è lo scopo del rifasamento di un carico in un sistema monofase di distribuzione dell'energia elettrica?

11.26 Quale è l'effetto del condensatore nel rifasamento di un carico?

11.27 Quale formula possiamo utilizzare per dimostrare l'effetto del condensatore nel rifasamento?

## *Il trasformatore*

11.28 Su quale fenomeno fisico si basa il funzionamento di un trasformatore?

11.29 Su quale supporto si avvolgono i due avvolgimenti di un trasformatore?

11.30 Come vengono chiamati i conduttori elettrici solenoidali che costituiscono il trasformatore?

11.31 In quale tipo di regime dinamico funziona il trasformatore?

11.32 Quale è lo scopo dell'impiego dei trasformatori nelle cabile elettriche presenti nelle reti di distribuzione dell'energia?

11.33 Quale componente ideale viene considerato nello schema circuitale equivalente di un trasformatore reale?

11.34 Da un punto di vista circuitale come può essere modellato il trasformatore?

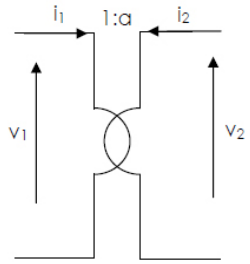
## *Il trasformatore ideale*

11.35 Quanto vale la potenza reattiva assorbita da un trasformatore ideale che lavora in un circuito in regime sinusoidale?

11.36 Che valori NON può assumere il rapporto di trasformazione di un trasformatore ideale a?

11.37 Cosa è il rapporto di trasformazione di un trasformatore ideale?

11.38 Quali sono le relazioni caratteristiche del trasformatore in figura?

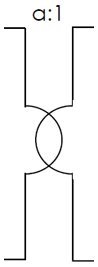



11.39 Che valori può assumere il rapporto di trasformazione di un trasformatore ideale?

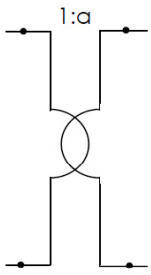
11.40 Quanto vale la potenza attiva assorbita da un trasformatore ideale in un circuito in regime sinusoidale?

## *Le proprietà del trasporto di impedenza*

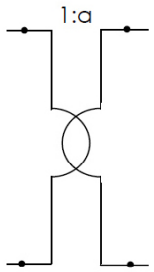
11.41 Se il trasformatore di figura ha una resistenza $R_c$ posta al secondario, quanto vale la resistenza equivalente vista dai morsetti del primario $R_{eq}$?




11.42 Se il trasformatore di figura ha una resistenza $R_c$ posta tra i morsetti della porta a sinistra del simbolo del trasformatore ideale, quanto vale la resistenza equivalente $R_{eq}$ vista dai morsetti della porta a destra?



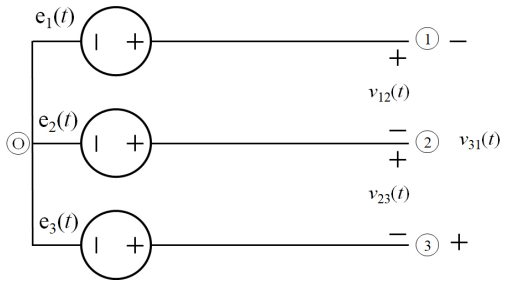
11.43 Se il trasformatore di figura ha un condensatore di capacità C posto al secondario, quanto vale la capacità equivalente vista al primario (a rapporto di trasformazione)?




## *I sistemi trifase*

11.44 Cosa si vuole indicare quando il trifase viene detto "con neutro"?

11.45 Che tipo di generatore trifase è quello di figura?




11.46 Cosa si intende per "tensione stellata" in un sistema trifase?

11.47 Cosa si intende per "tensione concatenata" in un sistema trifase?

11.48 Che relazione esiste tra tensione stellata e tensione concatenata?

11.49 Quanto vale la somma delle tensioni concatenate di un sistema trifase?

11.50 Cosa si intende per "generatore trifase"?

11.51 Quale delle seguenti espressioni è quella corretta per la determinazione del potenziale del centro stella del generatore trifase (abbiamo considerato nulla il centro stella del carico).

## *I sistemi trifase simmetrici ed equilibrati*

11.52 Cosa si intende per "sistema trifase simmetrico"?

11.53 Come sono sfasate tra loro le tensioni di fase di un generatore trifase?

11.54 Come sono tra loro i moduli delle tensioni stellate di un sistema trifase equilibrato?

11.55 Come sono tra loro le tensioni stellate di un sistema trifase simmetrico?

11.56 Che significa che la terna di tensioni stellata è diretta?

11.57 Cosa si intende per "sistema trifase equilibrato"?

11.58 Quale, tra le seguenti, è la corretta terna dei fasori delle tensioni stellate?

11.59 Quanto vale la somma dei fasori delle tensioni stellate in un sistema trifase simmetrico?

11.60 Quanto vale la somma dei fasori delle tensioni concatenate in un sistema trifase simmetrico?

11.61 Quanto vale la somma dei fasori delle correnti di un sistema trifase simmetrico ed equilibrato?

11.62 Come sono le tre impedenze di un carico trifase equilibrato?

11.63 Quale è la relazione tra il fasore della tensione stellata e quello della tensione concatenata di un sistema trifase simmetrico?

## *La potenza nei sistemi trifase simmetrici ed equilibrati*

11.64 Quanto vale la potenza attiva (reattiva) assorbita da un carico trifase?

11.65 In un sistema trifase simmetrico ed equilibrato, quanto vale la potenza istantanea assorbita dal carico?

11.66 Quanto vale la potenza fluttuante assorbita da un carico trifase equilibrato di un sistema trifase simmetrico?

11.67 Quale tra le seguenti espressioni è quella che può correttamente rappresentare la potenza attiva (reattiva) assorbita da un carico trifase?

11.68 Quale tra le seguenti è l'espressione corretta del modulo delle correnti in un sistema trifase simmetrico ed equilibrato?

11.69 Una volta nota la potenza attiva P e quella reattiva Q di un carico trifase, quale è l'espressione del modulo della corrente?

## *La misura della potenza nei sistemi trifase simmetrici ed equilibrati*

11.70 Che cosa enuncia il teorema di Aron?

11.71 È possibile misurare la potenza reattiva di un carico trifase con un solo wattmetro?

11.72 Che cosa si intende per "wattmetro in quadratura" di un sistema trifase?

11.73 Quale è l'angolo di fase che compare nell'espressione della potenza misurata da un wattmetro in quadratura in un sistema trifase?

11.74 Come è possibile misurare la potenza reattiva di un carico trifase utilizzando due soli wattmetri?

11.75 Se $\varphi$ è l'angolo di sfasamento tra il fasore della tensione stellata e il fasore della corrente di un sistema trifase, quanto vale l'angolo di sfasamento tra il fasore della voltmetrica e il fasore dell'amperometrica di un wattmetro in quadratura?

11.76 Quale è il significato fisico della potenza attiva misurata da un wattmetro in quadratura impiegato in un sistema trifase?

11.77 Se un sistema trifase è simmetrico ed equilibrato, cosa misura il wattmetro in quadratura?

11.78 In quale delle tre fasi va inserito il wattmetro in quadratura?

11.79 Quanti wattmetri impiega l'inserzione Aron?

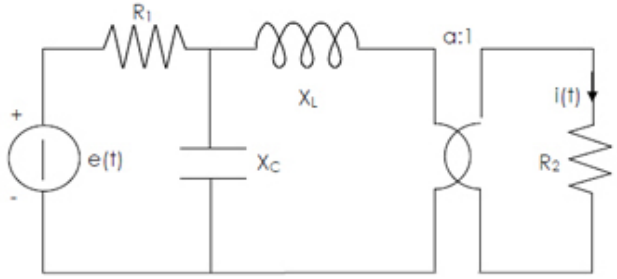
11.80 Su quali fasi è necessario posizionare i due wattmetri dell'inserzione Aron?

11.81 Data le misure $W_1$ e $W_2$ dei due wattmetri dell'inserzione Aron, quale delle seguenti espressioni restituisce la potenza attiva (reattiva) assorbita dal carico?

## Esercizi

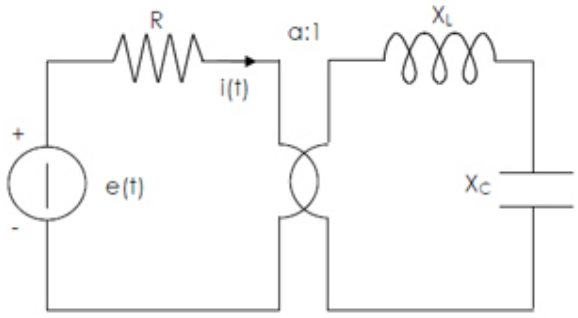
11.82 Calcolare la corrente $i(t)$ presente nel circuito con trasformatore in figura (e($t$)=8sen(100$t$); $R_1$ =2 Ω, $R_2$ =1/4 Ω, $X_L$= 2 Ω, $X_C$= 2 Ω, a=2)

$i(t)$= 5.06sen(100$t$ - arctg(3))



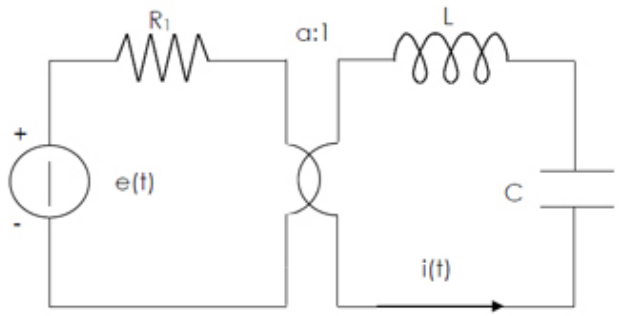

11.83 Calcolare la corrente $i(t)$ nel circuito in regime sinusoidale di figura (e($t$)=10sen(100$t$); R =10 Ω, $X_L$= 10 Ω, $X_C$= 10 Ω)

$i(t)$= sin(100$t$)



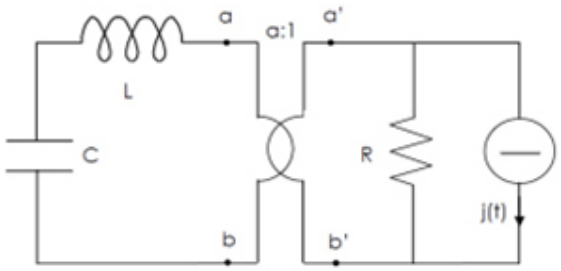

11.84 Calcolare la corrente $i(t)$ presente nel circuito con trasformatore in figura (e($t$)=3sen(100$t$); $R_1$ =2 Ω, $X_L$= 2 Ω, $X_C$= 2 Ω, a=2)

$i(t)$= - 3sen(100$t$)



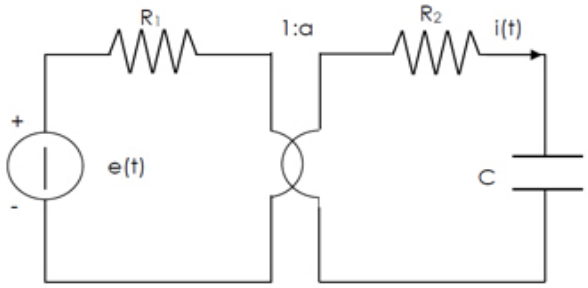

11.85 Calcolare la tensione $v(t)$ presente sul resistore R. (j($t$)=sen(100$t$); R =10 Ω, C=1mF; L=100mH)

$v(t)$= 0




11.86 Calcolare la corrente $i(t)$ presente nel circuito con trasformatore in figura (e($t$)=3sen(100$t$); $R_1$ =2 Ω, $R_2$ =2 Ω, $X_C$= 10 Ω, a=2)

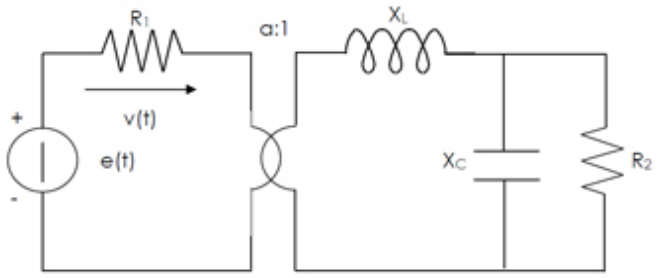
$i(t)= \frac{3\sqrt{2}}{10}\sin(100t+\pi/4)$



11.87 Calcolare la tensione $v(t)$ presente nel circuito con trasformatore in figura

($e(t)=8\text{sen}(100t)$; $R_1=4\ \Omega$, $R_2=2\ \Omega$, $X_L=3\ \Omega$, $X_C=2\ \Omega$, a=2)

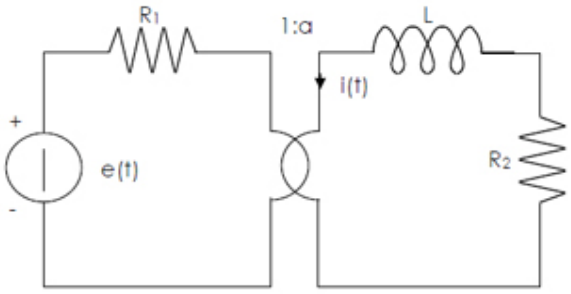
$v(t)= -2\sqrt{2}\,\text{sen}(100t-\pi/4)$




11.88 Calcolare la corrente i($t$) presente nel circuito di figura

($e(t)=10\text{sen}(100t)$; $R_1=1\ \Omega$, $R_2=6\ \Omega$, L=100mH, a=2)

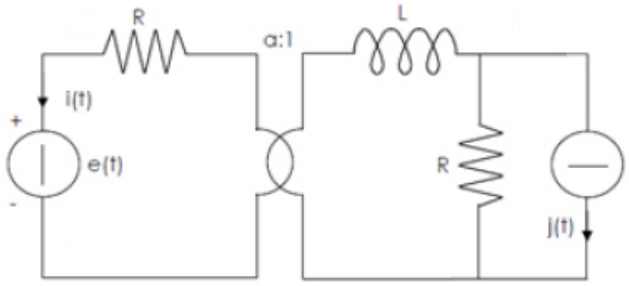
$i(t)= \sqrt{2}\,\sin(100t + 3\pi/4)$




11.89 Calcolare la corrente i($t$) presente nel circuito con trasformatore di figura

($e(t)=10\text{sen}(100t)$; $j(t)=5\text{sen}(100t)$; $R=1/10\ \Omega$; $X_L=100*L = 1/10\ \Omega$, a=2) (arctg è l'arcotangente)

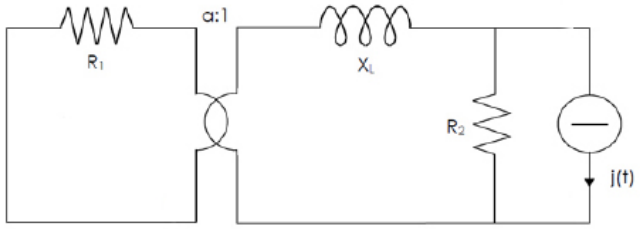
$i(t)= -17.2\ \sin(100t - \text{arctg}(0.8))$




11.90 Calcolare i fasori della corrente nel resistore $R_1$ e $R_2$ del circuito di figura

($j(t)=5\cos(100t)$, $R_1=0.25\ \Omega$, $R_2=1\ \Omega$; L=10 mH; a=0,5; si usano i fasori)

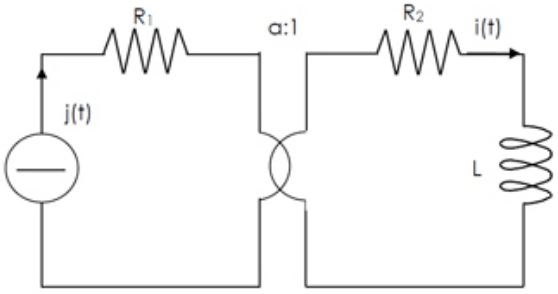
$I_{R1}=2(2-j)$, $I_{R2}=3+j$




11.91 Calcolare la corrente $i(t)$ presente nel circuito con trasformatore in figura

($j(t)=2\sin(100t-\pi/3)$; $R_1=2\ \Omega$; $R_2=2\ \Omega$; L= 0; 01 H; a=2)

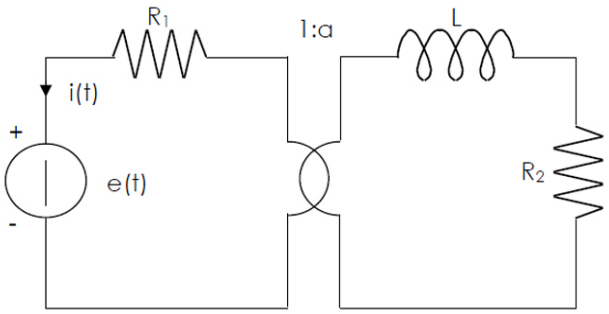
$i(t)= -4*\sin(100t-\pi/3)$



11.92 Calcolare la corrente $i(t)$ sul generatore di tensione del circuito di figura

($e(t)=10\cos(100t)$, $R_1=4\ \Omega$, $R_2=2\ \Omega$; L= 0,01 H; a=2)

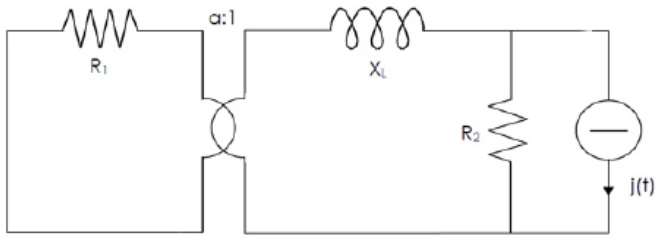
$i(t)=2.22\cos(100t+0{,}06)$




11.93 Calcolare il fasore della tensione sul generatore di corrente del circuito di figura

($j(t)=10\cos(100t)$, $R_1=4\ \Omega$, $R_2=2\ \Omega$; L= 0,01 H; a=2)

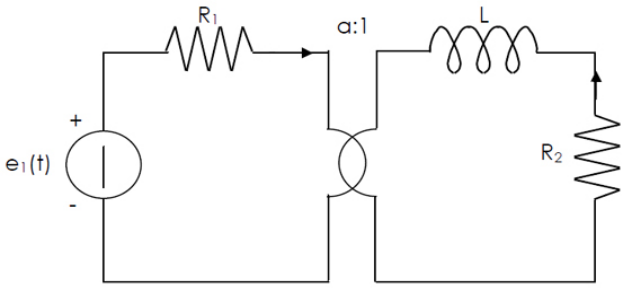
$\bar{V}=8(2+j)$



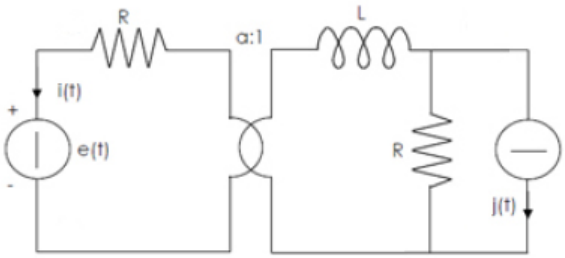

11.94 Calcolare i fasori della corrente nel resistore $R_1$ e $R_2$ del circuito di figura

($e_1(t)=10\cos(100t)$ (fasore E1=10); $R_1=2.25\ \Omega$, $R_2=1\ \Omega$; L=10mH; a=1,5)

$\bar{I}_{R1}=0.89(2-j);\ \bar{I}_{R2}=-1.33(2-j)$




11.95 Calcolare la matrice delle impedenze del doppio bipolo a-b/a'-b' in figura.

(R=1/10 Ω; $X_L$=100L = 1/10 Ω, a=2)

$\dot{Z}_{11} = 0.5 + j\frac{2}{5};\ \dot{Z}_{22} = 0.5;\ \dot{Z}_m = 0.1\,Z$