Lezione 8

Il regime sinusoidale e il metodo simbolico

Lezioni di **Elettrotecnica** per studenti di **Ingegneria Gestionale**

ideate e scritte da

Lorenza Corti

con il contributo di **Vincenzo Paolo Loschiavo**

Sommario

1 Il metodo simbolico ed i fasori 4

1.1 La definizione della trasformazione nel dominio simbolico e la definizione di fasore 6

1.1.1 Esercizio: trasformazione 9

1.1.2 Esercizio: anti-trasformazione 9

1.2 La trasformazione della derivata 10

1.2.1 Esercizio 11

1.3 La trasformazione del sistema di equazioni circuitali e la ricerca della soluzione nel dominio simbolico 11

1.3.1 Le leggi di Kirchhoff nel dominio simbolico 13

1.3.2 L'impedenza e l'ammettenza 14

1.3.3 Esercizio 20

1.3.4 Esercizio 20

1.3.5 Esercizio 21

1.4 I diagrammi fasoriali 22

1.4.1 Esercizio 24

2 Gli strumenti che si possono utilizzare 25

2.1 L'impedenza e l'ammettenza equivalente 25

2.1.1 Esercizio 26

2.2 I partitori di tensione e di corrente 28

2.2.1 Esercizio 28

2.3 La formula di Millman 29

2.3.1 Esercizio 29

2.4 Il circuito equivalente secondo Thevenin e Norton 30

2.4.1 Esercizio 31

3 La soluzione di circuiti in regime sinusoidale e l'ottimizzazione della strategia risolutiva 34

3.1 Esercizio: soluzione di un circuito a regime sinusoidale 34

4 Il principio di sovrapposizione degli effetti nei circuiti a regime sinusoidale 40

5 I circuiti risonanti 42

5.1 Il circuito RLC serie in risonanza 42

5.2 Il circuito RLC parallelo in risonanza 50

5.3 I circuiti con elementi in risonanza 55

5.3.1 Esercizio: risonanza serie 57

5.3.2 Esercizio: risonanza parallelo 60

6 L'analisi in frequenza di un circuito* 62

6.1 La risposta in frequenza e la funzione di rete 62

6.2 I filtri passivi 68

6.2.1 Il filtro passa–banda 69

6.2.2 Il circuito passa–banda come paradigma di una stazione radio ricevente 71

6.2.3 I filtri passa–basso e passa–alto 73

Appendici 75

Appendice 1 – Richiami sulle funzioni sinusoidali 75

Appendice 2 – Richiami sui numeri complessi 80

Appendice 3 – La trasformazione nel dominio dei fasori 85

Indice delle figure 90

Domande 92

Teoria 92

Esercizi 101

1 Il metodo simbolico ed i fasori

Allo stesso modo del regime stazionario, grazie alla proprietà di isomorfismo, sappiamo che un circuito lineare e tempo invariante che si trova a regime, alimentato da generatori sinusoidali isofrequenziali, ha tutte le grandezze sinusoidali isofrequenziali ai generatori. In altre parole, a regime sinusoidale tutte le grandezze sono contraddistinte dall'avere stessa dipendenza funzionale dal tempo (vedi Appendice 1 per la definizione di funzione sinusoidale e per le sue proprietà)[1]:

$$x(t) = \mathrm{X_M} \cos(\omega t + \alpha_x) \tag{8.1}$$

Quanto appena detto ci suggerisce una metodologia che consenta di trasformare tutte le grandezze sinusoidali del circuito in nuove grandezze non aventi una dipendenza dal tempo, essendo questa dipendenza dello stesso tipo per tutte le grandezze del sistema. Come vedremo nel prossimo paragrafo, il prezzo che si paga per questa trasformazione consiste nel fatto che le grandezze trasformate sono dei numeri complessi. Faremo vedere che, nonostante questo costo, la trasformazione conduce ad una importante semplificazione rappresentata dalla sostituzione dell'operatore di derivata (nel tempo) con una semplice moltiplicazione per un coefficiente dipendente dalla pulsazione ω delle grandezze sinusoidali e dai parametri induttanza L e capacità C che identificano i bipoli dinamici. Accade ciò che si indica con "algebrizzare" le derivate. Il metodo che consente di operare questa semplificazione si chiama ***metodo simbolico***[2] e il dominio trasformato si chiama ***dominio simbolico***[3].

Ricordiamo dalle Lezioni 4 e 5 che in regime stazionario, utilizzando gli strumenti introdotti nella Lezione 4 (la riduzione a resistenze equivalenti, i partitori, la formula di Millman e i circuiti equivalenti secondo Thevenin e Norton) riuscivamo a calcolare le

[1] In questo corso useremo una funzione coseno per definire una generica funzione sinusoidale (che in realtà si dovrebbe chiamare cosinusoidale). Tuttavia si potrebbe utilizzare allo stesso modo una funzione sinusoidale in quanto entrambe le due funzioni periodiche generano le stesse proprietà nei circuiti a regime sinusoidale. Si tenga conto che esiste una relazione notevole trigonometrica che consente di passare dal coseno al seno e viceversa (vedi la A.8 dell'Appendice 1)

[2] Il metodo simbolico è detto anche ***metodo dei fasori***.

[3] Il dominio simbolico è detto anche ***dominio dei fasori***.

grandezze del circuito operando direttamente sul circuito. Osserviamo che in regime sinusoidale, fintantoché restiamo nel dominio del tempo, non è più possibile sfruttare la riduzione a resistenze equivalenti di parti del circuito in quanto bisogna tenere conto della presenza di elementi dinamici la cui relazione caratteristica non è di tipo adinamico, come per i resistori. Ciò che ci impedisce di lavorare come nei circuiti resistivi (circuiti in regime stazionario) sono le derivate degli elementi dinamici presenti nel sistema di equazioni da risolvere. È facile dunque intuire che nel dominio simbolico, dove invece sono state algebrizzate le derivate, potremmo operare in modo simile a come facevamo in regime stazionario. Nel seguito vedremo come.

La trasformazione utilizzata nel metodo simbolico deve operare tra grandezze definite nel dominio del tempo e grandezze definite nel nuovo dominio trasformato. La corrispondenza tra i due domini è un ***isomorfismo lineare***, che rende algebrica, nel dominio simbolico, l'operazione di derivazione. Come vedremo, il metodo simbolico si basa sui ***fasori*** che sono delle grandezze complesse ed infatti il metodo simbolico si chiama anche ***metodo dei fasori*** e il dominio trasformato si chiama anche ***dominio dei fasori***. Ripetiamo ancora che, il solo prezzo che si paga per analizzare circuiti lineari in regime sinusoidale con il metodo simbolico, e quindi con i fasori, è di utilizzare grandezze complesse anziché reali.

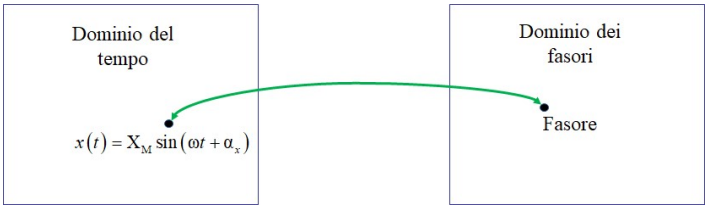


Fig. 8.1 – Corrispondenza biunivoca istaurata dal metodo simbolico.

La ***corrispondenza biunivoca*** della Fig. 8.1, instaurata con la trasformazione nel dominio dei fasori, gode delle seguenti proprietà:

- Deve essere ***unica***, cioè ad ogni funzione nel dominio del tempo deve associare uno ed un solo elemento (il fasore) nel nuovo dominio e viceversa. Questo perché una volta che ho trasformato il problema nel dominio simbolico devo poter tornare nel dominio del tempo individuando un'unica funzione che descrive la grandezza nel dominio del tempo. Vedi Appendice 3 per la dimostrazione.

- Deve essere ***lineare*** e trasformare il sistema di equazioni circuitali in altrettante equazioni nel dominio dei fasori tali da poter consentire di trovare ivi la soluzione. Le equazioni del sistema circuitale sono combinazioni lineari di funzioni sinusoidali e a queste dovranno corrispondere le stesse combinazioni lineari dei fasori nel dominio simbolico. Questo perché devo poter trasformare le equazioni del sistema di equazioni circuitali nel nuovo dominio senza alterare il loro contenuto informativo. Vedi Appendice 3 per la dimostrazione.
- Deve trasformare l'operatore di ***derivata***, che compare nel sistema di equazioni circuitali, in modo "conveniente" e cioè in maniera da rendere algebriche tutte le equazioni del sistema di equazioni circuitali. Vedi il § 1.2 e l'Appendice 3.

Nel prossimo paragrafo definiremo analiticamente la trasformazione in fasori delle grandezze definite nel dominio del tempo.

1.1 La definizione della trasformazione nel dominio simbolico e la definizione di fasore

La grandezza sinusoidale (8.1) è individuata da tre parametri:

1) Ampiezza (o valore massimo): X_M,

2) Pulsazione: ω,

3) Fase iniziale: α_x.

Per quanto riguarda la pulsazione ω abbiamo detto che, quando in un circuito vi sono generatori isofrequenziali di pulsazione ω, ogni grandezza del circuito è una funzione sinusoidale di pulsazione ω. Questo vuol dire che ogni grandezza del circuito sarà individuata, in definitiva, dai due parametri: X_M e α_x, essendo la dipendenza dal tempo uguale per tutte le grandezze. Nel dominio simbolico o dei fasori, dove il tempo non esiste, le grandezze saranno rappresentate da una coppia di valori.

La trasformazione nel dominio dei fasori è così definita (vedi la A.35 dell'Appendice 3):

$$x(t) = X_M \cos(\omega t + \alpha_x) = Re\left\{X_M e^{j\omega t} e^{j\alpha_x}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{X} = X_M e^{j\alpha_x} \tag{8.2}$$

dove $X_M e^{j\alpha_x}$ è un numero complesso rappresentato in forma esponenziale (vedi Appendice 2). Tale numero complesso si può rappresentare anche in forma polare:

$$X_M e^{j\alpha_x} = X_M\left(\cos(\alpha_x) + j\sin(\alpha_x)\right) \tag{8.3}$$

oppure in forma cartesiana:

$$X_M e^{j\alpha_x} = a+jb \tag{8.4}$$

dove la relazione tra le varie forme è definita dalle A.19 e A.20 dell'Appendice 2.

Il fasore è stato così definito nella (8.2):

$$\bar{X}=X_M e^{j\alpha_x} \tag{8.5}$$

Ma questo non è, nella letteratura della teoria dei circuiti, l'unico modo per definire il fasore. Moltiplicando, infatti, per un numero complesso arbitrario il fasore definito dalla trasformazione (8.2) otteniamo un'infinità di modi diversi di individuare il fasore del dominio trasformato:

$$\bar{X}=zX_M e^{j\alpha_x} \tag{8.6}$$

con z numero complesso arbitrario, diciamo $z=Ae^{j\alpha}$. È facile convincersi che la trasformazione (8.6) verifica le proprietà richiesta alla trasformazione.

Tra tutte le possibili scelte della costante complessa z, in letteratura, ne esiste una che conduce alla scrittura della (8.2) in funzione del ***valore efficace*** $X_{eff} = \frac{X_M}{\sqrt{2}}$, definito dalla A.4 dell'appendice 1, al posto del valore massimo X_M:

$$x(t) = \sqrt{2}X_{eff}\cos(\omega t + \alpha_x) = Re\left\{\sqrt{2}X_{eff}e^{j\omega t}e^{j\alpha_x}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{X} = X_{eff}e^{j\alpha_x} = \frac{X_M}{\sqrt{2}}e^{j\alpha_x} \tag{8.7}$$

in cui abbiamo posto $z=\frac{1}{\sqrt{2}}$ nella (8.6). Nel caso della trasformazione (8.7) si definisce il cosiddetto ***fasore efficace***. La trasformazione (8.7), come vedremo nella Lezione 9, gioca un ruolo molto importante nella definizione della potenza complessa.

In conclusione, la Fig. 8.1 la possiamo dettagliare come abbiamo fatto nella Fig. 8.2.

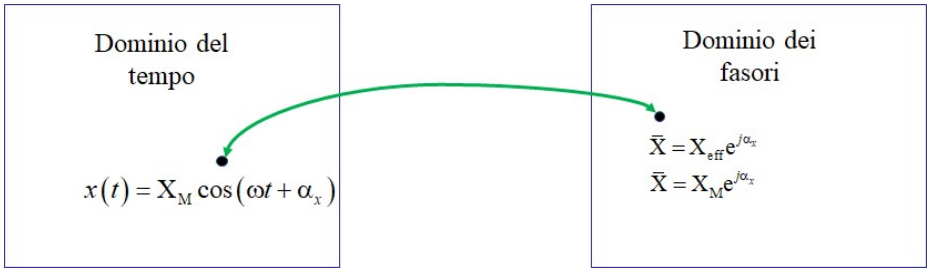


Fig. 8.2 – La trasformazione nel dominio dei fasori.

Possiamo a questo punto sottolineare che la trasformazione nel dominio simbolico che abbiamo definito nelle (8.2) e (8.7) deriva dall'espressione più generale (8.6), nella quale è presente la constante complessa z che possiamo utilizzare convenientemente in ogni problem solving (vedi ad esempio esercizio 2.3.1).

Inoltre, possiamo definire l'operazione inversa della trasformazione (8.2) o (8.7) che restituisce la funzione del tempo a partire dal fasore del dominio simbolico. Tale trasformazione inversa la chiamiamo ***anti-trasformata***. Considerando un generico coefficiente complesso $z=Ae^{j\alpha}$ nella (8.6), si avrebbe che, data la funzione x(t) nota nel dominio del tempo che trasformiamo nel dominio dei fasori con la trasformazione (8.6), il fasore $\bar{Y}=Ye^{j\beta_y}$ determinato nel dominio simbolico si anti−trasforma nel dominio del tempo come segue:

$$\begin{aligned} &\text{se } \; x(t)=X_M\cos(\omega t-\alpha_x)\Rightarrow \bar{X}=zX_Me^{j\alpha_x}=AX_Me^{j\alpha_x}e^{j\alpha} \\ &\text{allora } \; \bar{Y}=Ye^{j\beta_y}\Rightarrow y(t)=\frac{Y}{A}\cos(\omega t+\beta_y-\alpha) \end{aligned} \qquad (8.8)$$

Nell'esercizio 1.1.2 abbiamo proposto un esempio.

1.1.1 Esercizio: trasformazione

Consideriamo la funzione sinusoidale:

$$x(t) = 30\sin\left(100t + \frac{\pi}{4}\right) \tag{8.9}$$

Vogliamo calcolare il fasore che corrisponde a questa funzione.

Prima di scrivere il fasore corrispondente trasformiamo la funzione (8.9) in una equivalente che utilizza però la funzione coseno. Si ha:

$$x(t) = 30\sin\left(100t + \frac{\pi}{4}\right) = 30\cos\left(100t + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) = 30\cos\left(100t - \frac{\pi}{4}\right) \tag{8.10}$$

Utilizzando la trasformazione (8.2), otteniamo il fasore:

$$\bar{\mathrm{X}} = 30\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{4}} \tag{8.11}$$

Viceversa, utilizzando la trasformazione (8.6), avremo che il fasore sarà:

$$\bar{\mathrm{X}} = \frac{30}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{4}} \tag{8.12}$$

😉

1.1.2 Esercizio: anti-trasformazione

Supponiamo di avere il fasore:

$$\bar{\mathrm{X}} = -3 + j2 \tag{8.13}$$

Vogliamo ottenere la funzione sinusoidale ad esso corrispondente.

Cominciamo con lo scrivere il fasore (8.13) nella forma esponenziale. Dalla A.21 dell'Appendice 2 si ha:

$$\bar{\mathrm{X}} = \sqrt{9+4} \times \mathrm{e}^{j\left(\mathrm{arctg}\left(-\frac{2}{3}\right)+\pi\right)} = 3.61\mathrm{e}^{j2.54} \tag{8.14}$$

che corrisponde alla funzione:

$$x(t) = 3.61 \times \cos(\omega t + 2.54) \tag{8.15}$$

se utilizziamo la trasformazione (8.2), altrimenti la:

$$x(t) = \sqrt{2} \times 3.61 \times \cos(\omega t + 2.54) \tag{8.16}$$

se utilizziamo la trasformazione (8.6). La pulsazione ω rimane un parametro in quanto non specificata nei dati dell'esercizio.

😉

1.2 La trasformazione della derivata

In questo paragrafo ci vogliamo occupare di trovare la trasformata nel dominio simbolico della derivata di una grandezza circuitale definita nel dominio del tempo.

Vediamo innanzitutto che:

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= \frac{d\left(\mathrm{X_M}\cos(\omega t + \alpha_\mathrm{X})\right)}{dt} = -\omega \mathrm{X_M}\sin(\omega t + \alpha_\mathrm{x}) = \\ &= \omega \mathrm{X_M}\cos\left(\omega t + \alpha_\mathrm{x} + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \tag{8.17}$$

dove abbiamo utilizzato la relazione $-\sin(\alpha) = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$.

L'ultimo membro della (8.17) si trasforma nel dominio dei fasori banalmente:

$$\frac{d}{dt}\mathrm{X_M}\cos(\omega t + \alpha_\mathrm{x}) \quad \Leftrightarrow \quad \omega\,\mathrm{X_M}\mathrm{e}^{j\left(\alpha_x+\frac{\pi}{2}\right)} = j\omega\,\mathrm{X_M}e^{j\alpha_x} = j\omega\,\bar{\mathrm{X}} \tag{8.18}$$

dove abbiamo sfruttato la relazione $e^{j\frac{\pi}{2}} = j$ (vedi Appendice 2) e dove $\bar{X}$ rappresenta il fasore della funzione $x(t)$.

In conclusione, alla derivata delle funzioni sinusoidali nel dominio del tempo corrisponde nel dominio dei fasori la moltiplicazione per un coefficiente complesso, cioè:

$$\frac{d}{dt} \rightarrow j\omega \tag{8.19}$$

La trasformazione nel dominio simbolico che abbiamo definito in questa lezione "algebrizza" le equazioni differenziali in quanto vale la (8.19).

1.2.1 Esercizio

Consideriamo la funzione $y(t)$, che è la derivata della funzione sinusoidale $x(t)$ della (8.9):

$$y(t) = \frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}30\cos\left(100t + \frac{\pi}{4}\right) \tag{8.20}$$

Vogliamo calcolare il fasore che corrisponde alla funzione $y(t)$.

Ricordandoci della (8.11) e della (8.19) possiamo concludere che:

$$\bar{Y} = j\omega\bar{X} = j100 \times 30e^{j\frac{3}{4}\pi} = 3000e^{j\frac{5}{4}\pi} \tag{8.21}$$

😉

1.3 La trasformazione del sistema di equazioni circuitali e la ricerca della soluzione nel dominio simbolico

Dato un circuito che si trova in regime sinusoidale per il quale vogliamo calcolare il valore delle grandezze presenti, in questo paragrafo descriveremo quale è il modus operandi che, utilizzando la trasformazione nel dominio dei fasori, determina la soluzione dell'esercizio.

Ricordiamo che, grazie alla proprietà di unicità della trasformazione (vedi § 1 e Appendice 3), possiamo affermare che la trasformazione introdotta nella (8.2) o nella (8.7) individua un solo fasore per ogni funzione del tempo ed inoltre che, viceversa, ogni fasore presente nel dominio simbolico individua un'unica funzione nel dominio del tempo. Questo ci suggerisce di poter operare come rappresentato in Fig. 8.3: trasformiamo il problema definito nel dominio del tempo in uno definito nel dominio simbolico, operiamo nel dominio simbolico per determinare la soluzione del problema ed infine operiamo una trasformazione inversa che, anti-trasformando il fasore–soluzione nel dominio simbolico, individua univocamente la soluzione del problema nel dominio del tempo. Ricordiamo che tale trasformazione inversa, nel § 1 l'abbiamo chiamata ***anti-trasformata***. Ricordiamo inoltre che la convenienza di questo modus operandi è che nel dominio simbolico le relazioni sono di tipo algebrico e quindi la soluzione del problema risulta semplificata.

Descriviamo in dettaglio, per passi successivi, quanto illustrato nella Fig. 8.3.

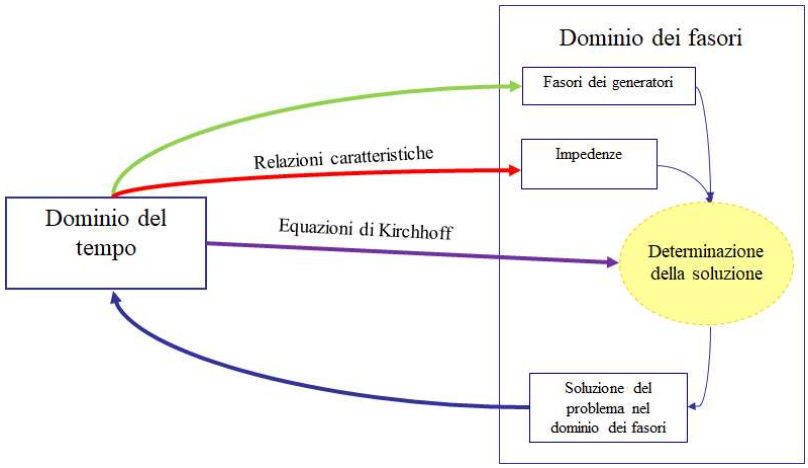


Fig. 8.3 – La trasformazione dal dominio del tempo al dominio dei fasori e l'anti-trasformata.

Modus operandi

1) Trasformiamo in fasori le grandezze note del problema e cioè le funzioni dei generatori (fase indicata in verde della Fig. 8.3)

2) Trasformiamo le relazioni caratteristiche. La trasformazione delle relazioni caratteristiche, come vedremo nel prossimo § 1.3.1, conduce all'individuazione delle ***impedenze*** e ***ammettenze*** dei singoli bipoli presenti nel circuito (in rosso nella Fig. 8.3). Queste rappresentano, come vedremo, il corrispondente, nel dominio dei fasori, delle resistenze di un circuito resistivo.
3) Trasformiamo le equazioni di Kirchhoff, individuando così delle relazioni di tipo algebrico tra i fasori.
4) Operiamo nel dominio simbolico per trovare i fasori della soluzione cercata. Il modo di operare sarà uguale a quello utilizzato nei circuiti resistivi e descritto ampiamente nelle Lezioni 4 e 5.
5) Anti-trasformiamo i fasori-soluzione nel dominio del tempo per individuare univocamente la soluzione cercata.

1.3.1 Le leggi di Kirchhoff nel dominio simbolico

Per quanto detto a proposito delle proprietà della trasformazione introdotta, e cioè valendo la proprietà di linearità, vogliamo scrivere le Leggi di Kirchhoff nel dominio simbolico. Ricordiamo quanto detto, e cioè che ciò si ottiene semplicemente trasformando le equazioni topologiche (3.17) e (3.20) della Lezione 3. In riferimento alla forma matriciale compatta delle equazioni topologiche del modello circuitale, ossia le (3.30) della Lezione 3, derivate dalle leggi di Kirchhoff, si ha, per un circuito di n nodi ed l lati:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_\mathrm{r} \cdot \overline{\mathbf{I}} = 0 \\ \mathbf{B}_\mathrm{f} \cdot \overline{\mathbf{V}} = 0 \end{cases} \tag{8.22}$$

dove $\mathbf{A}_\mathrm{r}$ è la matrice d'incidenza ridotta $(n-1)\times l$ definita nel § 2.4.1 della Lezione 3, $\mathbf{B}_\mathrm{f}$ è la matrice di un insieme di maglie fondamentali $l-(n-1)\times l$ definita nel § 2.4.2 della Lezione 3, $\overline{\mathbf{I}} = \left\{\overline{\mathrm{I}}_1, \overline{\mathrm{I}}_2 \ldots \overline{\mathrm{I}}_l\right\}^\mathrm{T}$ è il vettore colonna delle correnti di lato, ed infine $\overline{\mathbf{V}} = \left\{\overline{\mathrm{V}}_1, \overline{\mathrm{V}}_2 \ldots \overline{\mathrm{V}}_l\right\}^\mathrm{T}$ è il vettore colonna delle tensioni di lato.

In forma alternativa, partendo dalla (3.28) della Lezione 3, si ha:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_r \cdot \overline{\mathbf{I}} = 0 \\ \overline{\mathbf{V}} = \mathbf{A}_r^T \cdot \overline{\mathbf{\Phi}} \end{cases} \tag{8.23}$$

Osserviamo che in virtù della (A.24) possiamo anche scrivere, per quanto riguarda le LKC nel dominio simbolico:

$$\mathbf{A}_r \cdot \overline{\mathbf{I}}^* = 0 \tag{8.24}$$

che sarà utile nella Lezione 9, quando enunceremo il teorema di Tellegen nel dominio simbolico (vedi § 2 della Lezione 9).

1.3.2 L'impedenza e l'ammettenza

Trasformiamo nel dominio dei fasori le relazioni caratteristiche dei bipoli che conosciamo.

Per il resistore abbiamo:

$$v(t) = \mathrm{R}\, i(t) \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\mathrm{V}} = \mathrm{R}\overline{\mathrm{I}} \tag{8.25}$$

per l'induttore:

$$v(t) = \mathrm{L}\frac{di(t)}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\mathrm{V}} = j\omega\, \mathrm{L}\overline{\mathrm{I}} \tag{8.26}$$

per il condensatore:

$$i(t) = \mathrm{C}\frac{dv(t)}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\mathrm{V}} = \frac{\overline{\mathrm{I}}}{j\omega\, \mathrm{C}} \tag{8.27}$$

Osserviamo che per le (8.25), (8.26) e (8.27) abbiamo fatto la convenzione dell'utilizzatore sul bipolo.

Abbiamo trovato che il rapporto tensione-corrente dei bipoli passivi che conosciamo è, in generale, un numero complesso. Tutti i bipoli passivi si comportano nel dominio dei fasori

come se fossero dei resistori aventi per "resistenza" un numero complesso. Questo ci suggerisce di introdurre un costrutto che descriva tale "resistenza" complessa. Il rapporto tra i fasori tensione e corrente prende il nome di ***impedenza*** e si indica con $\dot{Z}$:

$$\dot{Z} = \frac{\overline{V}}{\overline{I}} \tag{8.28}$$

Per il resistore, l'induttore e il condensatore abbiamo[4]:

$$\dot{Z}_R = R \tag{8.29}$$

$$\dot{Z}_L = j\omega L \tag{8.30}$$

$$\dot{Z}_C = -\frac{j}{\omega C} \tag{8.31}$$

Il fatto che le impedenze di ogni bipolo del circuito si comportano come delle "resistenze complesse" ci suggerisce di trattare le impedenze di ogni bipolo del circuito come facevamo nei circuiti resistivi. Ad esempio, ha senso parlare di ***impedenza equivalente*** di bipoli serie e parallelo (vedi § 2.1) utilizzando formule analoghe ai circuiti resistivi ma nel caso delle impedenze si tratterà di fare operazioni con numeri complessi.

L'impedenza $\dot{Z}$ è, in generale, un numero complesso, pertanto possiamo scrivere:

$$\dot{Z} = R + jX \tag{8.32}$$

dove il coefficiente della parte reale R è detto ***resistenza*** e quello della parte immaginaria X prende il nome di ***reattanza***. Resistenza e reattanza dell'impedenza hanno dimensioni di ohm (Ω). Se è stata fatta la convenzione dell'utilizzatore la parte reale sarà positiva, mentre la parte immaginaria può essere sia positiva che negativa. Ricordiamo infatti che la parte immaginaria dei bipoli dinamici può essere positiva nel caso dell'induttore (vedi

[4] Le relazioni che seguono sono relative alla convenzione dell'utilizzatore sui bipoli.

la (8.30)) e negativa nel caso del condensatore (vedi la (8.31)). Ciò ci porta a definire un bipolo ***ohmico-induttivo*** nel caso di parte immaginaria positiva e un bipolo ***ohmico-capacitivo*** nel caso di parte immaginaria negativa.

Chiamiamo ***ammettenza*** $\dot{\mathrm{Y}}$ l'inverso dell'impedenza, ossia:

$$\dot{\mathrm{Y}} = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}^2 + \mathrm{X}^2} - j\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{R}^2 + \mathrm{X}^2} = \mathrm{G} + j\mathrm{B} \tag{8.33}$$

dove G è la ***conduttanza*** e B è detta ***suscettanza***. Conduttanza e suscettanza dell'ammettenza hanno dimensioni di siemens (S).

Per i bipoli passivi, resistore, induttore e condensatore, abbiamo:

$$Re\left\{\dot{\mathrm{Z}}\right\} = \mathrm{R}; \quad \mathrm{X}=0; \quad \mathrm{G}=\frac{1}{\mathrm{R}}; \quad \mathrm{B}=0 \tag{8.34}$$

$$\mathrm{R}=0; \quad \mathrm{X} = \omega\,\mathrm{L}; \quad \mathrm{G}=0; \quad \mathrm{B}=-\frac{1}{\omega\,\mathrm{L}} \tag{8.35}$$

$$\mathrm{R}=0; \quad \mathrm{X} = -\frac{1}{\omega\mathrm{C}}; \quad \mathrm{G}=0; \quad \mathrm{B}=\omega\mathrm{C} \tag{8.36}$$

Osserviamo che, facendo la convenzione dell'utilizzatore, la parte reale dell'impedenza e la parte reale dell'ammettenza sono positive. Al contrario la parte immaginaria dell'impedenza (la reattanza) e dell'ammettenza (la suscettanza) possono essere positive e negative. La reattanza del resistore è nulla, mentre la reattanza dell'induttore è positiva e quella del condensatore è negativa. La suscettanza del resistore è nulla, mentre la suscettanza dell'induttore è negativa e quella del condensatore è positiva. Quando la reattanza di un bipolo è positiva diremo che il bipolo equivalente è di tipo induttivo e la reattanza sarà una ***reattanza induttiva***; quando è negativa diremo che il bipolo equivalente è di tipo capacitivo e la reattanza sarà una ***reattanza capacitiva***.

Ora diamo una espressione all'impedenza a partire dai fasori della tensione e corrente. Supponiamo di avere per un bipolo con i seguenti fasori tensione e corrente:

$$\bar{V} = V_M e^{j\alpha_v} \quad \bar{I} = I_M e^{j\alpha_i} \tag{8.37}$$

e consideriamo il loro rapporto:

$$\dot{Z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = \frac{V_M}{I_M} e^{j(\alpha_v - \alpha_i)} = \frac{V_M}{I_M} e^{j\varphi} \tag{8.38}$$

Dunque, l'impedenza è un numero complesso avente per modulo il rapporto dei moduli dei fasori[5]:

$$Z = \frac{V_M}{I_M} \tag{8.39}$$

e per fase l'angolo φ :

$$\varphi = \alpha_v - \alpha_i \tag{8.40}$$

pari alla differenza di fase tra tensione e corrente.

Il modulo dell'impedenza ha le dimensioni di ohm (Ω).

Ora occupiamoci dell'ammettenza. Supponiamo di avere per un bipolo con i fasori tensione e corrente della (8.37) e consideriamo il loro rapporto che definisce l'ammettenza:

$$\dot{Y} = \frac{\bar{I}}{\bar{V}} = \frac{I_M}{V_M} e^{-j(\alpha_v - \alpha_i)} = \frac{I_M}{V_M} e^{-j\varphi} \tag{8.41}$$

L'ammettenza è un numero complesso avente per modulo il rapporto dei moduli dei fasori[6]:

[5] Per la definizione di modulo e fase di un numero complesso vedi Appendice 2.

[6] Per la definizione di modulo e fase di un numero complesso vedi Appendice 2.

$$Y=\frac{I_M}{V_M} \tag{8.42}$$

e per fase l'angolo $-\varphi$ dato dalla (8.40).

Il modulo dell'ammettenza ha le dimensioni di siemens (S).

Chiamiamo l'angolo φ angolo di ***sfasamento*** poiché esso rappresenta l'angolo di "sfasamento" tra la tensione e la corrente. Questo angolo può essere negativo o positivo.

Per i tre elementi passivi, resistore, induttore e condensatore, abbiamo:

$$Z_R = R;\ Y_R = \frac{1}{R};\ \varphi_R=0 \tag{8.43}$$

$$Z_L = \omega L;\ Y_L = \frac{1}{\omega L};\ \varphi_L=\frac{\pi}{2} \tag{8.44}$$

$$Z_C = \frac{1}{\omega C};\ Y_C=\omega C;\ \varphi_C=-\frac{\pi}{2} \tag{8.45}$$

Viste le (8.43), (8.44) e (8.45), possiamo dire che i fasori tensione e corrente del resistore sono in fase. Per quanto riguarda l'induttore, questo ha il fasore rappresentativo della tensione in anticipo di fase di $\pi/2$ rispetto a quello rappresentativo della corrente, mentre il condensatore ha il fasore rappresentativo della tensione in ritardo di fase di $\pi/2$ rispetto a quello rappresentativo della corrente. Nel § 1.4 abbiamo rappresentato graficamente quanto appena detto con i diagrammi fasoriali.

Facciamo alcune osservazioni su quanto abbiamo descritto in questo paragrafo.

Le impedenze e le ammettenze sono numeri complessi e anche i fasori sono numeri complessi, tuttavia rappresentano una cosa diversa. I fasori sono la rappresentazione di funzioni sinusoidali nel dominio simbolico. Una volta calcolato il fasore lo anti-trasformiamo per ottenere la funzione cercata. L'impedenza, invece, rappresenta un rapporto tra fasori nel dominio dei fasori. Non è una grandezza che anti-trasformiamo nel dominio del tempo. È per questa differenza che usiamo simboli diversi: per il fasore

usiamo il simbolo " – " sulla lettera maiuscola che indica il fasore, e per l'impedenza o ammettenza il punto. È molto importante ricordarsi di usare tali simboli perché in loro assenza possiamo credere che si tratti dei moduli dei numeri complessi, come ad esempio, indicato nella (8.39).

I fasori e le impedenze (ammettenze) possono esprimersi sia in forma esponenziale che in forma cartesiana (vedi Appendice 2). È possibile eseguire i calcoli nel dominio simbolico utilizzando le due rappresentazioni. Tuttavia, per prepararci alla anti-trasformazione di un fasore nel dominio del tempo, sarà necessario passare per la forma esponenziale che ci lascia individuare il modulo e la fase del numero complesso e quindi al valore massimo (o valore efficace) e alla fase della funzione sinusoidale. Quindi, anche se abbiamo lavorato con forme cartesiane dovremo fare un passaggio alla forma esponenziale prima di anti-trasformare così come abbiamo fatto nell'esercizio del § 1.1.2.

In Tabella 8.1 abbiamo riassunto quanto descritto fino ad ora per i tre bipoli passivi.

	Relazione caratteristica	$\dot{Z}(\dot{Y})$	$Z(Y)$	φ
Resistore	$\bar{V} = R\bar{I}$	$\dot{Z}_R = R$ $\left(\dot{Y}_R = \frac{1}{R}\right)$	$Z_R = R$ $\left(Y_R = \frac{1}{R}\right)$	$\varphi_R = 0$
Induttore	$\bar{V} = j\omega L\bar{I}$	$\dot{Z}_L = j\omega L$ $\left(\dot{Y}_L = -j\frac{1}{\omega L}\right)$	$Z_L = \omega L$ $\left(Y_L = \frac{1}{\omega L}\right)$	$\varphi_L = \frac{\pi}{2}$
Condensatore	$\bar{V} = -j\frac{1}{\omega C}\bar{I}$	$\dot{Z}_C = -j\frac{1}{\omega C}$ $\left(\dot{Y}_C = j\omega C\right)$	$Z_C = \frac{1}{\omega C}$ $\left(Y_C = \omega C\right)$	$\varphi_C = -\frac{\pi}{2}$

Tabella 8.1 – Sintesi delle impedenze e ammettenze dei bipoli passivi.

1.3.3 Esercizio

Calcoliamo l'impedenza e l'ammettenza di un condensatore avendo i seguenti dati:

DATI: C=3F, ω=100 rad/s.

Dalla (8.36) abbiamo che l'impedenza è:

$$\dot{Z}=jX_C=-j\frac{1}{\omega C}=-j\frac{1}{300}=-j3.\overline{3}\times10^{-3} \tag{8.46}$$

di conseguenza l'ammettenza è:

$$\dot{Y}=-j\frac{1}{X_C}=j\omega C=j300 \tag{8.47}$$

😉

1.3.4 Esercizio

Relativamente ad un bipolo presente in un circuito, avente la tensione e la corrente con la convenzione del generatore:

$$v(t)=30\sin(100t) \qquad \text{e} \qquad i(t)=10\cos\left(100t+\frac{\pi}{4}\right) \tag{8.48}$$

Calcolare l'impedenza e l'ammettenza del bipolo.

Per prima cosa dobbiamo trasformare le funzioni in fasori. Scriviamo la tensione come una funzione del coseno:

$$v(t)=30\cos\left(100t-\frac{\pi}{2}\right) \text{ e } i(t)=10\cos\left(100t+\frac{\pi}{4}\right) \tag{8.49}$$

A questo punto applichiamo alle funzioni (8.49) la trasformazione (8.2):

$$\overline{\mathrm{V}} = 30\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{2}} \qquad \text{e} \qquad \overline{\mathrm{I}} = 10\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{4}} \tag{8.50}$$

A questo punto possiamo applicare la formula (8.28):

$$\dot{\mathrm{Z}} = \frac{\overline{\mathrm{V}}}{\overline{\mathrm{I}}} = \frac{30\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{2}}}{10\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{4}}} = 3\mathrm{e}^{j\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} = 3\mathrm{e}^{-j\frac{3\pi}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{2}\left(-1+j\right) \tag{8.51}$$

Come si può osservare dalla (8.51), l'impedenza trovata ha la parte reale negativa e la parte immaginaria positiva. Avendo fatto la convenzione del generatore sul bipolo, possiamo dedurre che si tratta di un bipolo ***ohmico-capacitivo***[7].

1.3.5 Esercizio

Dati i fasori tensione e corrente di un bipolo su cui abbiamo fatto la convenzione dell'utilizzatore:

$$\overline{\mathrm{V}} = 2 + j3 \qquad \text{e} \qquad \overline{\mathrm{I}} = 1 - j \tag{8.52}$$

calcolare l'ammettenza $\dot{\mathrm{Y}}$ del bipolo.

Per calcolare l'ammettenza $\dot{\mathrm{Y}}$ possiamo operare direttamente con i fasori (8.52) in forma cartesiana oppure trasformarli nella forma esponenziale prima e poi valutare l'ammettenza. Scegliamo il primo procedimento. In virtù della (8.41) possiamo scrivere:

$$\dot{\mathrm{Y}} = \frac{\overline{\mathrm{I}}}{\overline{\mathrm{V}}} = \frac{1-j}{2+j3} = \frac{(1-j)(2-j3)}{4+9} = \frac{2-j2-j3-3}{13} = -\frac{1+j5}{13} \tag{8.53}$$

che espressa in forma esponenziale diventa:

[7] Ricordiamo che con la convenzione del generatore, contrariamente a quella dell'utilizzatore, la parte reale dell'impedenza è negativa e la parte immaginaria è positiva per il condensatore e negativa per l'induttore.

$$\dot{Y} = -\frac{1+j5}{13} = -0.39e^{j1.37} = 0.39e^{j4.51} \qquad (8.54)$$

😉

1.4 I diagrammi fasoriali

I fasori hanno un ***modulo*** X_M e una ***fase*** α che corrisponde al modulo e alla fase del numero complesso che li rappresenta. Ricordando quanto descritto nell'Appendice 1 e 2 sulle funzioni sinusoidali e sui numeri complessi, vogliamo rappresentare i fasori in un piano, detto ***diagramma fasoriale***, nel quale i fasori siano rappresentati da "vettori" aventi la coda nell'origine del riferimento e aventi il modulo proporzionale al modulo del fasore. La direzione e verso di questi "vettori" dipenderanno dalla fase α. In Fig. 8.4 abbiamo rappresentato in un diagramma fasoriale i fasori tensione $\bar{V}=V_M e^{j\alpha_v}$ e corrente $\bar{I}=I_M e^{j\alpha_i}$ relativi ad un generico bipolo con sfasamento $\varphi=\alpha_v - \alpha_i$.

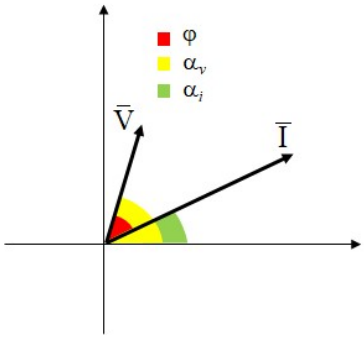


Fig. 8.4 – Rappresentazione nel diagramma fasoriale della tensione e corrente di un generico bipolo.

Nel diagramma fasoriale di Fig. 8.4 abbiamo scelto l'asse delle ascisse come riferimento per i fasori aventi fase nulla. Gli altri si collocheranno nel diagramma facendo ruotare il fasore dal riferimento scelto in senso antiorario di un angolo pari alla propria fase.

Vediamo i diagrammi fasoriali per i singoli bipoli passivi resistore, induttore e condensatore. Supponiamo, per tutti, che il fasore della corrente sia a fase nulla ($\alpha_i = 0$), e quindi collochiamolo sull'asse delle ascisse.

Dalla (8.43), deduciamo che: per il resistore la tensione ha la stessa fase della corrente e modulo pari a quello della corrente moltiplicato per il fattore R. Il diagramma risulterà pertanto quello di Fig. 8.5. In questo caso, si dice che i fasori sono in fase.

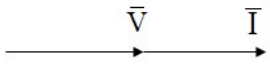


Fig. 8.5 – Diagramma fasoriale del resistore.

Dalla (8.44), deduciamo che per l'induttore la tensione $\bar{V} = j\omega L\bar{I}$ è sfasata di $\frac{\pi}{2}$ rispetto alla fase supposta nulla della corrente ($j = e^{j\frac{\pi}{2}}$). Il modulo è pari a quello della corrente moltiplicato il fattore ωL. Si ha quindi la Fig. 8.6. Si dice che la tensione è in ***anticipo di fase*** rispetto alla corrente.

Fig. 8.6 – Diagramma fasoriale dell'induttore.

Infine, dalla (8.45), per il condensatore la tensione $\bar{V} = -j\frac{1}{\omega C}\bar{I}$ è sfasata di $-\frac{\pi}{2}$ rispetto alla corrente e modulo scalato di $\frac{1}{\omega C}$ rispetto a quello della corrente. Il diagramma fasoriale è quello di Fig. 8.7. Si dice che la tensione è in ***ritardo di fase*** rispetto alla corrente.

Fig. 8.7 – Diagramma fasoriale del condensatore.

1.4.1 Esercizio

Vogliamo disegnare il diagramma fasoriale dei vettori tensione e corrente di un bipolo presente in un circuito. Abbiamo fatto la convenzione dell'utilizzatore e abbiamo a disposizione i seguenti dati:

DATI: $\bar{V} = 3,\ \dot{Z} = 1 + j3$.

Per rappresentare graficamente nel diagramma fasoriale il fasore della tensione e della corrente abbiamo bisogno di determinare il fasore della corrente. In virtù della (8.28) possiamo scrivere:

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\dot{Z}} = \frac{3}{1 + j3} = \frac{3(1 - j3)}{10} = 0.3 - j0.9 \tag{8.55}$$

Trasformando la forma cartesiana (8.55) del fasore della corrente in quella esponenziale:

$$\bar{I} = 0.3 - j0.9 = 0.95e^{-j1.25} \tag{8.56}$$

La corrente è in ritardo di fase come si vede dalla (8.56) e quindi la tensione è in anticipo di fase come mostrato in figura Fig. 8.8.

😉

Fig. 8.8 – Diagramma fasoriale del bipolo assegnato nell'esercizio.

2 Gli strumenti che si possono utilizzare

Nel dominio simbolico o dei fasori, analogamente a quanto facevamo per i circuiti resistivi, è possibile usare gli strumenti introdotti nella Lezione 4 per la risoluzione di circuiti resistivi. In questa sezione vogliamo richiamare e utilizzare tali strumenti nell'ambito del dominio simbolico. Le formule che utilizzeremo sono uguali a quelle dei circuiti resistivi tranne che per il fatto che stavolta bisognerà utilizzare i numeri complessi.

Ricordiamo che gli strumenti introdotti nella Lezione 4 sono:

- la resistenza e la conduttanza equivalente basate sull'equivalenza serie/parallelo;
- il partitore di tensione e di corrente;
- la formula di Millman;
- il generatore equivalente secondo Thevenin e Norton.

Tutti gli esercizi svolti in questa sezione sono presi dalla piattaforma https://autocircuits.org/[8].

2.1 L'impedenza e l'ammettenza equivalente

Analogamente a quanto imparato nei circuiti resistivi, possiamo nel contesto dei circuiti a regime sinusoidale analizzati con il metodo simbolico introdurre il calcolo di impedenze ed ammettenze equivalenti. Facciamo riferimento a quanto imparato nel § 2 della Lezione 4. L'impedenza e ammettenza equivalenti, basate sul principio di equivalenza (vedi § 1.1 della lezione 4), che è possibile calcolare unicamente nel dominio simbolico, dimostra chiaramente quanto potente sia il metodo simbolico. Mettiamo in evidenza che, per la presenza delle derivate di eventuali elementi dinamici, non sarebbe possibile utilizzare l'equivalenza di bipoli passivi nel dominio del tempo.

[8] Ricordiamo che https://autocircuits.org/autocir_home.html è stato realizzato dal prof. Stefano Grivet-Talocia, Politecnico di Torino. È possibile generare altri esercizi risolti utilizzando il sito che prevede varie categorie di esercizi.

Osserviamo che una volta calcolata l'impedenza o ammettenza equivalente di un sotto–circuito passivo nel dominio simbolico e sostituita al sotto–circuito stesso, è possibile anti–trasformare il circuito nel dominio del tempo utilizzando gli elementi dinamici che realizzano l'impedenza o ammettenza trovata nel dominio simbolico. In altre parole, le operazioni basate sul principio di equivalenza operate nel dominio simbolico sulla struttura topologica del circuito, realizzano un circuito semplificato che può essere anti–trasformato nel dominio del tempo ottenendo un circuito reale semplificato (confronta la parte finale dell'esercizio del prossimo § 2.1.1.

2.1.1 Esercizio

Vogliamo calcolare l'impedenza equivalente $\dot{Z}_{eq}$ vista dai terminali A–B del sotto–circuito di Fig. 8.9 quando il circuito si trova in regime sinusoidale ad una frequenza f=1Hz.

Osservando il sotto–circuito visto dai terminali A–B possiamo affermare che il condensatore, il resistore con resistenza 2Ω e l'induttore sono in parallelo, poi in serie al resistore di 3Ω, e il tutto in parallelo al resistore di 1Ω. Procediamo nei calcoli e utilizziamo sempre una rappresentazione cartesiana dei numeri complessi.

Innanzitutto, calcoliamo le reattanze dei bipoli dinamici, abbiamo[9]:

$$X_L=6.28\Omega \text{ e } X_C=-5.31\times10^{-2}\Omega \tag{8.57}$$

Cominciamo con il parallelo del condensatore e induttore:

$$\dot{Z}_{eq}=\frac{jX_C\times jX_L}{jX_C+jX_L}=-j\frac{6.28\times5.31\times10^{-2}}{6.28+5.31\times10^{-2}}=-j5.36\times10^{-2} \tag{8.58}$$

Il bipolo equivalente è di tipo capacitivo.

[9] Si osservi che, nel caso in cui si considerano la parte reale e immaginaria dell'impedenza o dell'ammettenza indichiamo l'unità di misura Ω.

Calcoliamo il parallelo di $\dot{Z}_{eq}$ della (8.58) con la resistenza di 2Ω:

$$\dot{Z}'_{eq} = \frac{2 \times \dot{Z}_{eq}}{2 + \dot{Z}_{eq}} = -\frac{2 \times j5.36 \times 10^{-2}}{2 - j5.36 \times 10^{-2}} = 1.44 \times 10^{-3} - j5.36 \times 10^{-2} \qquad (8.59)$$

Ora la serie con la resistenza di 3Ω:

$$\dot{Z}''_{eq} = 3 + 1.44 \times 10^{-3} - j5.36 \times 10^{-2} = 3 - j5.36 \times 10^{-2} \qquad (8.60)$$

In parallelo con la resistenza di 1Ω:

$$\dot{Z}_{eq} = 0.75 - j3.34 \times 10^{-3} \qquad (8.61)$$

Che è quanto richiesto dall'esercizio! 😊

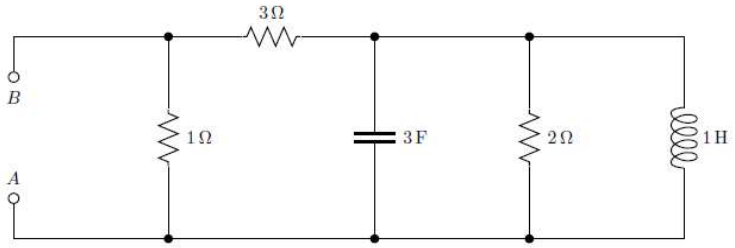


Fig. 8.9 – Esercizio per il calcolo dell'impedenza equivalente.

Ci chiediamo ora: come è possibile realizzare l'impedenza (8.61) nel corrispondente bipolo del circuito reale definito nel dominio del tempo? Osserviamo che la (8.61) è l'impedenza di un bipolo ohmico-capacitivo poiché la parte reale è non nulla e la parte immaginaria ha segno negativo. Pertanto, possiamo utilizzare, nel dominio del tempo, un sotto–circuito equivalente a quello di Fig. 8.9 costituito da un resistore di resistenza R=0.75Ω e un condensatore di capacità $C = \frac{1}{\pi 6.68} \times 10^3$.

2.2 I partitori di tensione e di corrente

Analogamente a quanto imparato nei circuiti resistivi, possiamo, per i circuiti a regime sinusoidale nel dominio dei fasori, introdurre il partitore di tensione e quello di corrente. Facciamo riferimento a quanto imparato nel § 3 della Lezione 4. Sottolineiamo che, al pari dell'impedenza e ammettenza equivalente, è possibile utilizzare i partitori unicamente nel dominio simbolico. Mettiamo in evidenza ancora che, per la presenza delle derivate di eventuali elementi dinamici, non sarebbe possibile utilizzare i partitori nel dominio del tempo.

2.2.1 Esercizio

In riferimento alla Fig. 8.10, vogliamo calcolare il fasore della tensione, diciamolo $\bar{V}$, del condensatore come indicato in figura. Il circuito si trova a regime sinusoidale con pulsazione $\omega=3s^{-1}$. Il fasore del generatore è $\bar{J}=-1$.

In questo esercizio i dati vengono assegnati direttamente nel dominio simbolico.

Calcoliamo la reattanza del condensatore X_C:

$$X_C=-\frac{1}{\omega C}=-\frac{1}{3\times 3}=-\frac{1}{9}=-0.\bar{1}\Omega \tag{8.62}$$

Per calcolare il fasore $\bar{V}$ possiamo calcolare il fasore della corrente $\bar{I}$ rappresentato in Fig. 8.10. Tale fasore possiamo calcolarlo con il seguente partitore di corrente:

$$\bar{I}=-\frac{3}{3+3-j0.\bar{1}}\bar{J}=-\frac{3}{6-j0.\bar{1}} \tag{8.63}$$

A questo punto calcoliamo il fasore $\bar{V}$:

$$\bar{V}=-j0.\bar{1}\times\frac{-3}{6-j0.\bar{1}}=\frac{j3}{54-j}=-1.03\times10^{-3}+j55.54\times10^{-3} \tag{8.64}$$

Che è quanto richiesto dall'esercizio! 😊

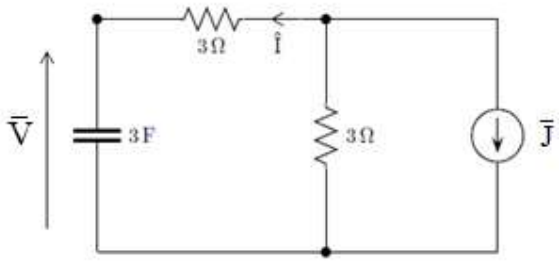


Fig. 8.10 – Esercizio con partitore di corrente.

2.3 La formula di Millman

Analogamente a quanto imparato nei circuiti resistivi, possiamo, per circuiti in regime sinusoidale nel dominio simbolico, utilizzare la formula di Millman, quando la topologia del circuito lo consente. Facciamo riferimento a quanto imparato nel § 8 della Lezione 4.

È possibile utilizzare la formula di Millman unicamente nel dominio simbolico, poiché, per la presenza delle derivate di eventuali elementi dinamici, non sarebbe possibile nel dominio del tempo.

2.3.1 Esercizio

Vogliamo calcolare la tensione $v_4(t)$ del circuito di Fig. 8.11 quando il circuito si trova a regime sinusoidale con il generatore $v_{s1}(t)=2\cos(3t-2.36)$.

Per prima cosa abbiamo bisogno di trasformare il generatore nel dominio dei fasori. Utilizzando la trasformazione (8.2), come vedremo a meno della fase, si ha:

$$\bar{V}_{s1}=2 \tag{8.65}$$

Come anticipato abbiamo scelto di non trasformare la fase $e^{-j2.36}$ poiché comporterebbe una complessità di calcoli nel dominio dei fasori. Ovviamente ne dovremo tenere conto quando anti–trasformeremo il fasore $\bar{V}_4$ nel dominio del tempo. Come abbiamo già sottolineato nel § 1.1, la trasformazione nel dominio simbolico che abbiamo definito nelle (8.2) e (8.7) deriva dall'espressione più generale (8.6), nella quale è presente la constante

complessa $z = Ae^{j\alpha}$ che possiamo utilizzare convenientemente in ogni problem solving. In questo caso abbiamo utilizzato $z = e^{j2.36}$.[10]

Per calcolare il fasore $\overline{V}_4$ possiamo applicare la formula di Millman:

$$\overline{V}_4 = \frac{-\frac{\overline{V}_{s1}}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{j3}} = \frac{-2}{2-j} = \frac{-2}{2-j} = -\frac{4}{5} - j\frac{2}{5} = \frac{2}{\sqrt{5}} e^{j(\text{arctg}(0.5)+\pi)} \qquad (8.66)$$

A questo punto anti–trasformiamo il fasore (8.66), tenendo conto del coefficiente $z = e^{j2.36}$ e della (8.8), possiamo anti–trasformare:

$$v_4(t) = 0.894\cos(3t + 0.46 + 180 - 2.36) = -0.894\cos(3t - 1.90) \qquad (8.67)$$

Che è quanto richiesto dall'esercizio! 😊

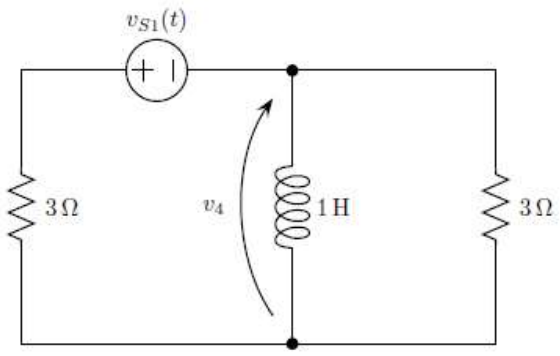


Fig. 8.11 – Esercizio con formula di Millman.

2.4 Il circuito equivalente secondo Thevenin e Norton

Analogamente a quanto imparato nei circuiti resistivi (vedi la Lezione 5) possiamo, nel contesto dei circuiti a regime sinusoidale analizzati con il metodo simbolico, utilizzare il teorema del generatore equivalente. Facciamo riferimento a quanto imparato nella

[10] Confronta l'esercizio del § 3.2 della Lezione 9.

Lezione 5. Il teorema del generatore equivalente, basato sul principio di equivalenza (vedi § 1.1 della lezione 4), è possibile utilizzarlo unicamente nel dominio simbolico, poiché, per la presenza delle derivate di eventuali elementi dinamici, non sarebbe possibile nel dominio del tempo.

Osserviamo che, come per l'impedenza o ammettenza equivalente, le operazioni basate sul principio di equivalenza operate nel dominio simbolico consentono di individuare un circuito semplificato che può essere anti-trasformato nel dominio del tempo. Sostituiremo al sotto–circuito su cui abbiamo operato nel dominio simbolico, un generatore ideale di tensione (corrente) avente in serie (parallelo) un bipolo passivo. Il generatore erogherà una tensione (corrente) pari all'anti–trasformata nel dominio del tempo del fasore tensione a vuoto $\overline{V}_0$ (corrente di corto circuito $\overline{I}_{cc}$) per il generatore di Thevenin (di Norton). Il bipolo passivo sarà ottenuto a partire dalla $\dot{Z}_{eq}$ allo stesso modo di come abbiamo descritto per l'impedenza e ammettenza equivalente (vedi § 2.1 e la parte finale dell'esercizio del § 2.1.1).

2.4.1 Esercizio

Vogliamo calcolare il circuito equivalente secondo Thevenin del sotto–circuito mostrato in Fig. 8.12, quando il circuito si trova a regime sinusoidale con il generatore $i_{s1}(t)=2\sin(3t-75°)$.

Per individuare il generatore reale di tensione equivalente al sotto–circuito di Fig. 8.12, dobbiamo calcolare l'impedenza equivalente $\dot{Z}_{eq}$ e la tensione a vuoto $\overline{V}_0$ visti ai terminali A–B. Ricordiamo che per fare ciò abbiamo immaginato di collegare i terminali A–B con un generatore di caratterizzazione in corrente che poi spegniamo per calcolare la tensione a vuoto $\overline{V}_0$.

Cominciamo con trasformare il generatore $i_{s1}(t)$ nel dominio dei fasori. Volendo trasformare, nel dominio dei fasori, una funzione coseno, e utilizzando note formule trigonometriche, scriviamo la $i_{s1}(t)$ come funzione del coseno:

$$i_{s1}(t)=2\sin(3t-1.31)=2\cos(3t-2.88) \qquad (8.68)$$

e quindi trasformando come la (8.7):

$$\overline{I}_{s1} = \frac{2}{\sqrt{2}} e^{-j2.88} = \sqrt{2} e^{-j2.88} \tag{8.69}$$

Osserviamo che potevamo utilizzare anche la (8.2) per la trasformazione, o la (8.6) con z scelta ad arbitrio, ma, consapevoli di questo, per il problem solving in esame abbiamo fatto la scelta (8.69).

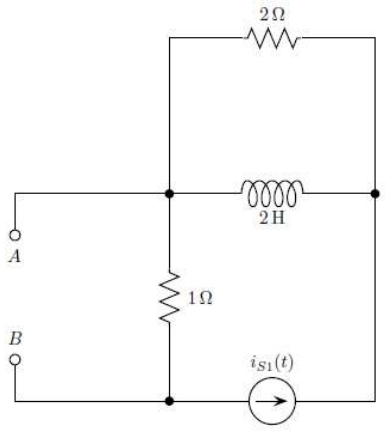


Fig. 8.12 – Sotto-circuito di cui calcolare il generatore equivalente Continuiamo calcolando l'impedenza equivalente $\dot{Z}_{eq}$. Dobbiamo rendere passivo il sotto−circuito e quindi spegnere il generatore di corrente. Osserviamo dalla Fig. 8.12 che quando spegniamo il generatore di corrente i terminali A−B vedono unicamente la resistenza di 1Ω. Quindi si ha:

$$\dot{Z}_{eq} = 1 \tag{8.70}$$

Per quanto riguarda la tensione a vuoto, $\overline{V}_0$, dalla Fig. 8.12, osserviamo che la tensione tra i terminali A−B è pari alla tensione sul resistore di 1Ω. Essendo poi i terminali A−B a vuoto, la corrente che troviamo in tale resistore è quella del generatore $\overline{I}_{s1}$. Ciò detto possiamo scrivere:

$$\bar{V}_0 = 1 \times \hat{I}_{s1} = \sqrt{2} e^{-j2.88} = -1.37 - j0.37 \qquad (8.71)$$

Che è quanto richiesto dall'esercizio! 😊

3 La soluzione di circuiti in regime sinusoidale e l'ottimizzazione della strategia risolutiva

In questo paragrafo abbiamo l'obiettivo di risolvere un circuito in regime sinusoidale partendo dal dominio del tempo e tornando nel dominio del tempo dopo aver risolto il problema nel dominio simbolico. Facciamo quindi riferimento alla Fig. 8.3 che definisce la procedura da seguire per trovare la soluzione di un circuito utilizzando il metodo simbolico.

Per risolvere un problema nell'ambito della teoria dei circuiti, come abbiamo ampiamente visto nel § 10 della Lezione 4, possiamo utilizzare diverse strategie risolutive. Ricordiamo che la scelta della strategia risolutiva può rivelarsi molto importante in termini economici e che è importante, prima di iniziare a risolvere un problema, individuare TUTTE le strategie risolutive e poi stabilire quale sia la più conveniente da utilizzare. Ricordiamo che abbiamo definito più "conveniente" una strategia risolutiva rispetto ad un'altra se comporta un numero di calcoli inferiore e possibilmente di minor complessità.

Nell'esercizio che segue, mostreremo come procedere nella risoluzione del problema proposto seguendo quanto appreso sul problem solving (§ 10 della Lezione 4).

3.1 Esercizio: soluzione di un circuito a regime sinusoidale

Vogliamo calcolare le correnti $i_2(t)$ e $i_4(t)$ del circuito mostrato in Fig. 8.13 quando il circuito si trova a regime sinusoidale con il generatore $v_{s1}(t) = 3\sin(2t - 105°)$.

Cominciamo con il trasformare il generatore di tensione $v_{s1}(t)$ nel dominio dei fasori. Volendo trasformare, nel dominio dei fasori, una funzione coseno, e utilizzando note formule trigonometriche, scriviamo la $v_{s1}(t)$ come funzione del coseno:

$$v_{s1}(t) = 3\sin(2t - 105°) = 3\cos(2t - 195°) \tag{8.72}$$

e quindi trasformandolo, con la formula (8.2)[11], nel seguente fasore:

[11] Ricordiamoci dell'arbitrio nella scelta della formula di trasformazione nel dominio simbolico (vedi § 1.1)

$$\overline{V}_{s1}=3e^{-j3.4} \tag{8.73}$$

Per calcolare i fasori $\overline{I}_2$ e $\overline{I}_4$, possiamo utilizzare diverse strategie risolutive. Ad esempio:

1) scrivere e risolvere il sistema di equazioni circuitali trasformato nel dominio dei fasori;
2) utilizzare la formula di Millman per trovare la tensione tra i due nodi del circuito e poi dividere questa per le impedenze dei due lati dei quali vogliamo calcolare le correnti;
3) utilizzare un partitore di tensione tra la resistenza di 1Ω e l'impedenza equivalente al parallelo della resistenza di 2Ω con l'induttore. Una volta ottenuta la tensione, dividiamo per le due impedenze per trovare le due correnti richieste.

Nell'intento di sperimentare come la scelta della strategia risolutiva sia molto importante nell'ambito del ***problem solving***, vogliamo utilizzare tutte le tre strategie sopra descritte per poi confrontarle e stabilire quale delle tre risulta maggiormente conveniente (confronta con l'esercizio del § 10.1 e § 10.2 della Lezione 4).

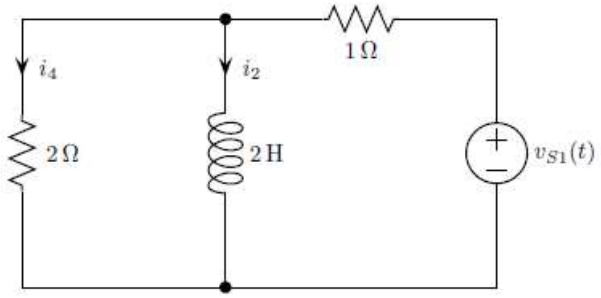


Fig. 8.13 – Circuito in regime sinusoidale.

Strategia risolutiva (1).

Al fine di scrivere il sistema di equazioni circuitali, facciamo riferimento alla Fig. 8.14. Nella figura abbiamo numerato i lati con numeri arabi e i nodi con numeri romani. Le grandezze di ogni bipolo avranno per pedice il numero di lato.

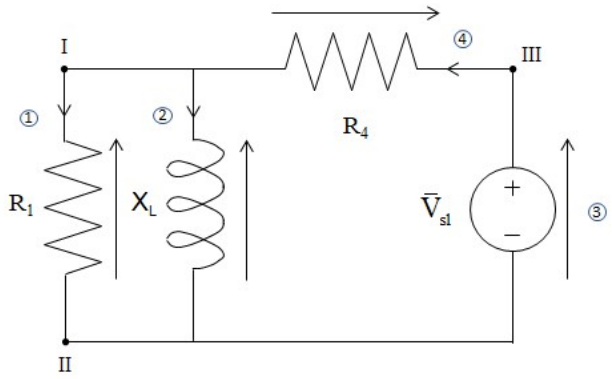


Fig. 8.14 – Circuito di Fig. 8.13.

Possiamo scrivere il seguente sistema di equazioni circuitali:

$$\begin{cases} \bar{I}_1+\bar{I}_2-\bar{I}_4=0 \\ \bar{V}_1-\bar{V}_2=0 \\ \bar{V}_2+\bar{V}_4-\bar{V}_{s1}=0 \\ \bar{V}_1=R_1\bar{I}_1 \\ \bar{V}_2=jX_L\bar{I}_2 \\ \bar{V}_4=R_4\bar{I}_4 \end{cases} \tag{8.74}$$

Dove abbiamo sostituito direttamente la relazione caratteristica del generatore di tensione. Si tratta di un sistema algebrico di sei equazioni in sei incognite e per determinare i fasori $\bar{I}_2$ e $\bar{I}_4$ è necessario risolvere il sistema, ad esempio per eliminazioni successive. Sostituendo le ultime tre relazioni caratteristiche nella seconda e nella terza:

$$\begin{cases} \bar{I}_1+\bar{I}_2-\bar{I}_4=0 \\ R_1\bar{I}_1-jX_L\bar{I}_2=0 \\ jX_L\bar{I}_2+R_4\bar{I}_4-\bar{V}_{s1}=0 \end{cases} \tag{8.75}$$

Sostituendo la $\bar{I}_1$ presa dalla prima equazione nelle altre due:

$$\begin{cases} -R_1\bar{I}_2+R_1\bar{I}_4-jX_L\bar{I}_2=0 \\ jX_L\bar{I}_2+R_4\bar{I}_4-\bar{V}_{s1}=0 \end{cases} \tag{8.76}$$

da cui si ricava:

$$\bar{I}_4 = \frac{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{jX_L}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_4} + \dfrac{1}{jX_L}} \frac{\bar{V}_{s1}}{R_4} \tag{8.77}$$

e

$$\bar{I}_2 = \frac{\dfrac{1}{jX_L}}{\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_4} + \dfrac{1}{jX_L}\right)} \frac{\bar{V}_{s1}}{R_4} \tag{8.78}$$

Strategia risolutiva (2).

Utilizzando la formula di Millman per calcolare la tensione $\bar{V}_{I\text{-}II}$ tra i nodi I e II, possiamo scrivere:

$$\bar{V}_{I\text{-}II} = \frac{\dfrac{\bar{V}_{s1}}{R_4}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_4} + \dfrac{1}{jX_L}} \tag{8.79}$$

Una volta nota la $\bar{V}_{I\text{-}II}$ possiamo calcolare le due correnti richieste dal problema:

$$\bar{I}_4 = -\frac{\bar{V}_{I\text{-}II} - \bar{V}_{s1}}{R_4} = \frac{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{jX_L}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_4} + \dfrac{1}{jX_L}} \frac{\bar{V}_{s1}}{R_4} \tag{8.80}$$

e

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{V}_{I\text{-}II}}{jX_L} = \frac{\dfrac{1}{jX_L}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_4} + \dfrac{1}{jX_L}} \frac{\bar{V}_{s1}}{R_4} \tag{8.81}$$

Si osservi che la (8.80) e la (8.81) sono uguali alle (8.77) e (8.78) ottenute con la prima strategia risolutiva.

Strategia risolutiva (3).

Questa strategia prevede l'utilizzo dei partitori. Poiché useremo convenientemente un partitore di tensione tra la resistenza R_1 e il parallelo dell'induttanza con la resistenza R_4, calcoliamo l'impedenza equivalente $\dot{Z}_{eq}$ del parallelo:

$$\dot{Z}_{eq} = \frac{R_1 \times jX_L}{R_1 + jX_L} \tag{8.82}$$

Poi eseguiamo il partitore di tensione:

$$\overline{V}_{I\text{-}II} = \frac{\dot{Z}_{eq}}{\dot{Z}_{eq} + R_4}\overline{V}_{s1} = \frac{\dfrac{1}{R_4}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_4} + \dfrac{1}{jX_L}}\overline{V}_{s1} \tag{8.83}$$

da cui infine:

$$\overline{I}_4 = -\frac{\overline{V}_{I\text{-}II} - \overline{V}_{s1}}{R_4} = -\frac{1}{R_4}\frac{\dot{Z}_{eq}}{\dot{Z}_{eq} + R_1}\overline{V}_{s1} = \frac{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{jX_L}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_4} + \dfrac{1}{jX_L}}\frac{\overline{V}_{s1}}{R_4} \tag{8.84}$$

e

$$\overline{I}_2 = \frac{\overline{V}_{I\text{-}II}}{jX_L} = \frac{1}{jX_L}\frac{\dot{Z}_{eq}}{\dot{Z}_{eq} + R_4}\overline{V}_{s1} = \frac{\dfrac{1}{jX_L}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_4} + \dfrac{1}{jX_L}}\frac{\overline{V}_{s1}}{R_4} \tag{8.85}$$

A questo punto siamo in grado di fare un confronto per stabilire quale sia il metodo più conveniente per risolvere il problema. Le differenze non sono eclatanti poiché il circuito in esame è molto semplice, tuttavia qualcosa si può osservare. Immaginiamo quanto le diverse strategie possano differenziarsi in termini di costo per circuiti più complessi.

Quale metodo dunque risulta più conveniente?

Lasciando per esercizio il calcolo numerico delle espressioni risolutive trovate analiticamente 😉, diamo i seguenti risultati:

$$i_2(t) = 0.493\cos(2t + 84°) \tag{8.86}$$

e

$$i_4(t) = 0.986\cos(2t + 174°) \tag{8.87}$$

4 Il principio di sovrapposizione degli effetti nei circuiti a regime sinusoidale

In questo paragrafo vogliamo rispondere alla domanda: si può utilizzare la sovrapposizione degli effetti nel dominio simbolico per calcolare la soluzione di un circuito lineare tempo-invariante che si trova a regime sinusoidale quando sono presenti più generatori di tipo sinusoidale?

Per poter rispondere a questa domanda dobbiamo specificare se i generatori presenti sono isofrequenziali, cioè se hanno la stessa pulsazione ω (vedi Appendice 1) oppure no. Nel primo caso possiamo affermare che è possibile usare la sovrapposizione degli effetti nel dominio simbolico, nel secondo caso, invece, NO. Vediamo perché.

Supponiamo di dover studiare un circuito con due generatori sinusoidali aventi pulsazioni ω_1 e ω_2. Poniamo quindi:

$$g_1(\omega_1,t)=\mathrm{G_{M1}}\cos(\omega_1 t+\alpha_{g1}) \text{ e } g_2(\omega_2,t)=\mathrm{G_{M2}}\cos(\omega_2 t+\alpha_{g2}) \tag{8.88}$$

Nel dominio del tempo possiamo ragionare come abbiamo fatto nel § 5.2.1 della Lezione 4. Ricordiamo che il principio di sovrapposizione degli effetti afferma che se in un circuito vi sono più generatori, tutte le grandezze del circuito sono ottenibili come somma, o "sovrapposizione", delle grandezze che si possono osservare in relazione ad ogni singolo generatore. Nel modellare il circuito con un sistema ingresso-uscita, in ingresso possiamo considerare i due generatori (8.88) e in uscita possiamo considerare la somma delle risposte ai singoli generatori (vedi Fig. 4.26 del § 5.2.1 della Lezione 4) come abbiamo rappresentato in Fig. 8.15. Analiticamente possiamo scrivere (vedi la (4.54) del § 5.2.1 della Lezione 4):

$$\begin{aligned} x(\omega_1,\omega_2,t)&=f\left(\mathrm{g_1}(\omega_1,t)+\mathrm{g_2}(\omega_2,t)\right)=x_1(\omega_1,t)+x_2(\omega_1,t)= \\ &=\mathrm{X_{M1}}\cos(\omega_1 t+\alpha_{x1})+\mathrm{X_{M2}}\cos(\omega_2 t+\alpha_{x2}) \end{aligned} \tag{8.89}$$

Pertanto, per ottenere $x(\omega_1,\omega_2,t)$ sarà necessario calcolare $x_1(\omega_1,t)$ e poi $x_2(\omega_2,t)$ e sommarle. Ciò può essere fatto per qualsiasi valore di ω_1 e ω_2.

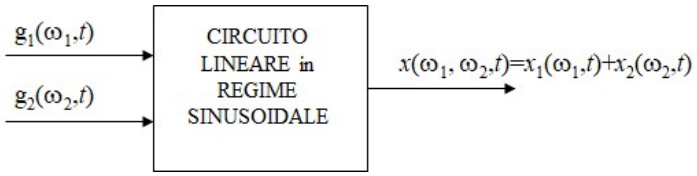


Fig. 8.15 – Sovrapposizione degli effetti in regime sinusoidale.

Ma nella domanda incipit del paragrafo ci siamo chiesti se la sovrapposizione degli effetti rappresentata dall'espressione (8.89) si potesse utilizzare nel dominio simbolico. Possiamo riscrivere la (8.89):

$$\begin{aligned} x(\omega_1,\omega_2,t) &= \mathrm{X}_{\mathrm{M1}}\cos(\omega_1 t+\alpha_{\mathrm{x1}})+\mathrm{X}_{\mathrm{M2}}\cos(\omega_2 t+\alpha_{\mathrm{x2}})= \\ &= Re\left\{\mathrm{X}_{\mathrm{M1}}\mathrm{e}^{j\omega_1 t}\mathrm{e}^{j\alpha_{\mathrm{x1}}}\right\}+Re\left\{\mathrm{X}_{\mathrm{M2}}\mathrm{e}^{j\omega_2 t}\mathrm{e}^{j\alpha_{\mathrm{x2}}}\right\} \end{aligned} \qquad (8.90)$$

e dedurne che NON è possibile trasformare la grandezza (8.90) nel dominio dei fasori, in quanto la funzione non è più periodica se $\omega_1 \neq \omega_2$ come abbiamo ampiamente illustrato in riferimento alla (A.10) dell'Appendice 1.

Concludiamo che quando abbiamo due generatori sinusoidali con $\omega_1 \neq \omega_2$ in un circuito lineare e tempo-invariante a regime sinusoidale la sovrapposizione degli effetti si può effettuare solo nel dominio del tempo. Possiamo utilizzare il metodo simbolico quando vogliamo calcolare le singole risposte ai due generatori. La somma delle due risposte, però, deve essere effettuata nel dominio del tempo.

5 I circuiti risonanti

In regime sinusoidale può accadere di osservare un fenomeno molto interessante sul quale si basano non poche applicazioni. Si tratta del fenomeno della ***risonanza,*** che tratteremo in questo paragrafo.

Un circuito in regime sinusoidale, comunque complesso, nel quale siano presenti resistenze, induttanze e capacità e un solo elemento attivo si dice in ***risonanza*** quando, rispetto al generatore che lo alimenta, si comporta come un circuito puramente ohmico. Da questa definizione si può intuire che, quando un circuito è in risonanza, gli effetti capacitivi e induttivi presenti nel circuito si bilanciano a vicenda in maniera che il carico visto dal generatore sia equivalente ad una sola resistenza. Tuttavia, l'importanza di questo fenomeno risiede nel fatto che quando il circuito si trova in tali condizioni una delle grandezze presenti nel circuito assume valori molto elevati rispetto a quelli assunti in condizioni ordinarie. Questo comportamento, come vedremo nei § 4.1 e 4.2, si può ascrivere nella classe dei sistemi che chiamiamo filtri e che vengono studiati con un'analisi in frequenza trattata nel § 6.

Nel nostro corso osserveremo e studieremo il fenomeno della risonanza in circuiti del II ordine RLC serie e RLC parallelo. Oltre a questi due esempi faremo vedere, come sempre in semplici circuiti del II ordine, che in condizioni di risonanza i due elementi dinamici in serie o in parallelo si comportano, rispettivamente, come un corto circuito ed un circuito aperto permettendoci di analizzare il circuito in maniera semplificata.

5.1 Il circuito RLC serie in risonanza

Osserveremo il fenomeno della risonanza nel circuito RLC illustrato in Fig. 8.16. Consideriamo il funzionamento in regime sinusoidale di tale circuito.

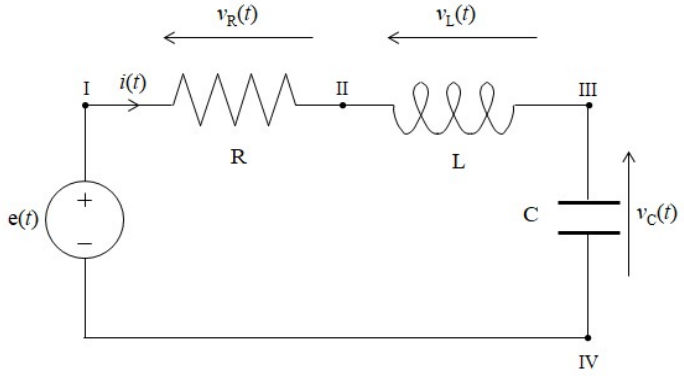


Fig. 8.16 – Circuito RLC serie.

Immaginiamo che la pulsazione del generatore e(t) del circuito Fig. 8.16 non sia fissata (vedi § 6 per un approfondimento). Lasciamo che esso sia un parametro del problema e quindi supponiamo che il generatore generi una tensione:

$$\mathrm{e}(\omega,t)=\mathrm{E_M}\cos(\omega t) \tag{8.91}$$

Il fasore corrispondente alla tensione (8.91) sarà, grazie alla (8.2):

$$\overline{\mathrm{E}}=\mathrm{E_M} \tag{8.92}$$

che non dipende, nel dominio dei fasori, dalla pulsazione ω.

Osservando il circuito di Fig. 8.16, vediamo che il generatore vede l'impedenza equivalente $\dot{\mathrm{Z}}_{\mathrm{eq}}$:

$$\dot{\mathrm{Z}}_{\mathrm{eq}}(j\omega)=\mathrm{Z}_{\mathrm{eq}}(\omega)\mathrm{e}^{j\varphi_z(\omega)}=\mathrm{R}+j\left(\omega\mathrm{L}-\frac{1}{\omega\mathrm{C}}\right) \tag{8.93}$$

che è l'impedenza equivalente della serie del resistore, dell'induttore e del condensatore. Il modulo dell'impedenza (8.93):

$$\mathrm{Z}_{\mathrm{eq}}(\omega)=\sqrt{\mathrm{R}^2+\left(\omega\mathrm{L}-\frac{1}{\omega\mathrm{C}}\right)^2} \tag{8.94}$$

e la fase:

$$\varphi_z(\omega) = \text{arctg}\left(\frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R}\right) \tag{8.95}$$

La corrente che possiamo osservare nell'unica maglia presente avrà la seguente generica espressione nel dominio del tempo:

$$i(\omega, t) = I_M \cos(\omega t + \alpha_i) \tag{8.96}$$

Il fasore della corrente $i(t)$ possiamo scriverlo come[12]:

$$\overline{I}(j\omega) = I_M(\omega) e^{j\alpha_i(\omega)} = \frac{\overline{E}}{\dot{Z}_{eq}(j\omega)} \tag{8.97}$$

Nella (8.97) vediamo che, grazie alla dipendenza dal parametro ω dell'impedenza $\dot{Z}_{eq}(j\omega)$, anche il fasore della corrente dipende da tale parametro.

Il modulo del fasore corrente (8.97), grazie alla (8.94), è:

$$I_M(\omega) = \frac{E_M}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{E_M}{\sqrt{R^2 + (X_L + X_C)^2}} \tag{8.98}$$

e la fase del fasore corrente (8.97), grazie alla (8.95), è:

$$\alpha_i(\omega) = -\varphi_z(\omega) = -\text{arctg}\left(\frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R}\right) = -\text{arctg}\left(\frac{X_L + X_C}{R}\right) \tag{8.99}$$

[12] Si noti che tra parentesi abbiamo soltanto indicato la dipendenza dei diversi termini dalla pulsazione ω.

Consideriamo, ora, l'andamento del modulo della corrente (8.98), I_M, al variare della pulsazione ω. È immediato verificare che il valore del modulo I_M tende a zero per ω –> 0 e per ω –> +∞ come mostrato in Fig. 8.17, mentre la fase (8.99) assume valore pari a π/2 per ω –> 0 e –π/2 per ω –> +∞ come mostrato in Fig. 8.18.

Il modulo della corrente assume il suo valore massimo in corrispondenza della pulsazione caratteristica del circuito:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{8.100}$$

La pulsazione (8.100) prende il nome di ***pulsazione di risonanza*** del circuito. Quando alimentiamo il circuito con un generatore avente pulsazione uguale a quella di risonanza, ω_0, abbiamo che il modulo del fasore corrente presenta il suo valore massimo ammissibile pari a:

$$I_M(\omega_0) = \frac{E_M}{R} \tag{8.101}$$

mentre la sua fase assume il valore:

$$\alpha_i(\omega_0) = -\text{arctg}\left(\frac{0}{R}\right) = 0 \tag{8.102}$$

Inoltre, riscrivendo la fase (8.99) nel modo che segue:

$$\alpha_i(\omega) = -\text{arctg}\left(\frac{\omega L}{R}\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)\right) \tag{8.103}$$

si osserva facilmente che per $\omega < \omega_0$ la fase è positiva e la reattanza equivalente è di tipo capacitivo, mentre per $\omega > \omega_0$ la fase è negativa e la reattanza equivalente è di tipo induttivo.

Il grafico del modulo della corrente (8.98) al variare della pulsazione lo abbiamo mostrato in Fig. 8.17 dove abbiamo considerato sull'asse delle ordinate i valori normalizzati al

valore massimo E_M/R. Si osservi come la funzione va a zero in corrispondenza di una pulsazione nulla e di quella tendente all'infinito e come assume un massimo in corrispondenza della pulsazione ω_0, assumendo un andamento di tipo "a campana".

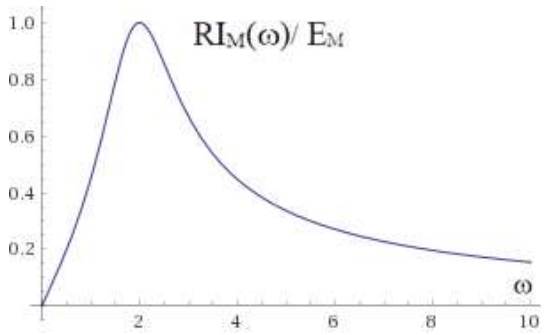


Fig. 8.17 – Andamento del modulo del fasore della corrente (8.98) in funzione della pulsazione ω.

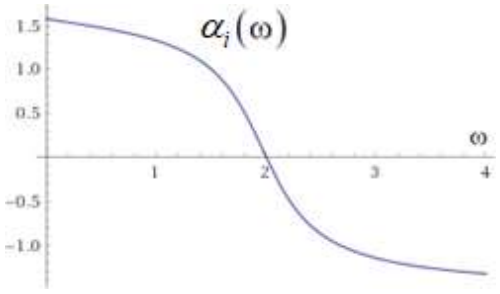


Fig. 8.18 – Andamento della fase del fasore della corrente (8.99) in funzione della pulsazione ω.

Si osservi che il fatto che la corrente assuma alla frequenza di risonanza un valore molto più alto rispetto ai valori di funzionamento ordinari può dar luogo ad effetti devastanti. Un esempio classico di risonanza, che non è un fenomeno strettamente "elettrotecnico" ma ad esso può essere spesso ricondotto mediante analogia, è il collasso del Tacoma Bridge nel 1940 che, soggetto ad un vento a raffica con frequenza vicina a quella di risonanza del ponte fu distrutto (guarda tra tanti https://www.youtube.com/watch?v=j-zczJXSxnw).

Vediamo quali sono le proprietà che si manifestano quando il circuito si trova in risonanza.

È facile verificare dalla (8.93) che, in risonanza, e cioè per $\omega=\omega_0$, la parte immaginaria dell'impedenza $\dot{Z}_{eq}$ è uguale a zero, essendo infatti la reattanza del condensatore opposta di quella dell'induttore:

$$\omega = \omega_0 \quad \Rightarrow \; \omega L = \frac{1}{\omega C} \quad \Rightarrow \quad X_L = -X_C \tag{8.104}$$

e quindi l'impedenza risulta puramente resistiva. In questo caso, il modulo di $\dot{Z}_{eq}$ (8.94) assume il valore minimo e la sua fase (8.95) è nulla.

Dalla (8.104), deduciamo che alla risonanza si verifica che la tensione del condensatore $\overline{V}_C$ è l'opposto di quella dell'induttore $\overline{V}_L$:

$$\overline{V}_L(\omega_0) = jX_L(\omega_0)\overline{I}(\omega_0) = -jX_C(\omega_0)\overline{I}(\omega_0) = -\overline{V}_C(\omega_0) \tag{8.105}$$

e quindi la serie dei due elementi dinamici si comporta complessivamente come un corto circuito e, allo stesso tempo, la tensione sul resistore è uguale a quella del generatore: $\overline{V}_R = \overline{E}$. In particolare, si ha:

$$V_{L_M}(\omega_0) = V_{C_M}(\omega_0); \quad \alpha_{v_L} = \alpha_{v_C} + \pi \tag{8.106}$$

I moduli sono uguali e le fasi differiscono per π.

Da un punto di vista energetico possiamo osservare che la potenza fornita dal generatore viene assorbita unicamente dal resistore senza che venga immagazzinata alcuna sua parte nei due elementi dinamici. L'induttore e il condensatore, infatti, alla risonanza si scambiano continuamente energia tra loro senza che venga coinvolta la sorgente. In definitiva, alla pulsazione di risonanza il circuito, rispetto alla tensione che lo alimenta, si comporta come se fosse puramente ohmico.

Esaminiamo, infine, il rapporto tra il valor massimo dei moduli delle tensioni (8.105), in condizioni di risonanza, degli elementi conservativi (rispetto all'energia) e il valore massimo della tensione del generatore. Lo facciamo ad esempio per il solo induttore:

$$\frac{V_{L_M}(\omega_0)}{E_M} = \frac{V_{C_M}(\omega_0)}{E_M} = \frac{\omega_0 L I_M(\omega_0)}{R I_M(\omega_0)} = \frac{\omega_0 L}{R} = Q \tag{8.107}$$

dove Q si chiama ***fattore di qualità*** del circuito risonante. Esso può assumere qualsiasi valore anche >1. Osserviamo che Q>>1 (ω_0L>>R), allora la tensione sull'induttore e sul condensatore possono assumere valori molto elevati nonostante la sorgente abbia un valore massimo esiguo. Ciò dipende dal valore della pulsazione di risonanza rispetto al rapporto L/R. Un circuito in risonanza, dunque, può diventare pericoloso nonostante l'utilizzo di piccoli valori per il modulo della tensione del generatore.

Il fattore di qualità serve anche a valutare quanto è stretta la campana di Fig. 8.17. Vediamo come. Consideriamo il modulo della corrente di maglia (8.98) normalizzato rispetto al fasore corrente alla risonanza (8.101):

$$\frac{I_M(\omega)}{I_M(\omega_0)} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{R}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} \tag{8.108}$$

Si può dimostrare, con uno studio di funzione, che la funzione (8.108) definisce le cosiddette ***curve universali di risonanza***, rappresentate in Fig. 8.19, al variare del parametro Q avendo fissato il valore della pulsazione di risonanza ω_0. Al crescere del fattore di qualità Q la curva a campana diventa più stretta e quindi, come vedremo nel § 6, più selettiva in frequenza.

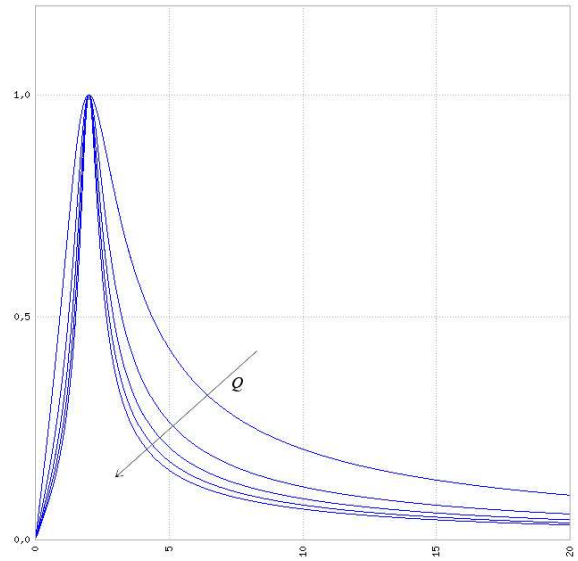


Fig. 8.19 – Curve universali di risonanza per il modulo (8.108).

Si può inoltre dimostrare che all'aumentare del parametro *Q,* avendo fissato il valore della pulsazione di risonanza ω_0, la curva relativa all'andamento dell'angolo di fase diventa più pendente. Consideriamo la (8.103) che riscriviamo in maniera da esplicitare il fattore di qualità *Q*:

$$\alpha_i(\omega) = -\text{arctg}\left(Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right) \tag{8.109}$$

Abbiamo rappresentato in Fig. 8.20 il grafico dell'andamento qualitativo delle curve di risonanza per la fase al crescere del fattore *Q*.

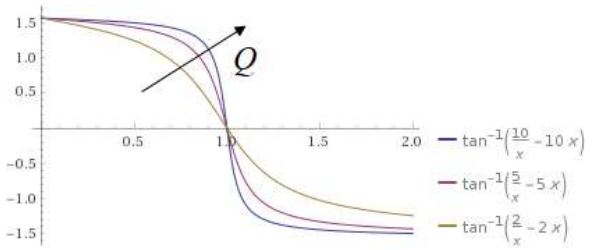


Fig. 8.20 – Curve universali di risonanza per la fase (8.109)

5.2 Il circuito RLC parallelo in risonanza

Il circuito RLC parallelo può manifestare anch'esso il fenomeno della risonanza. Tuttavia, in questo caso avremo un generatore di corrente al posto di quello di tensione e dovremo considerare in uscita la tensione sul parallelo dei bipoli come abbiamo evidenziato in Fig. 8.21 con la tensione $v(t)$.

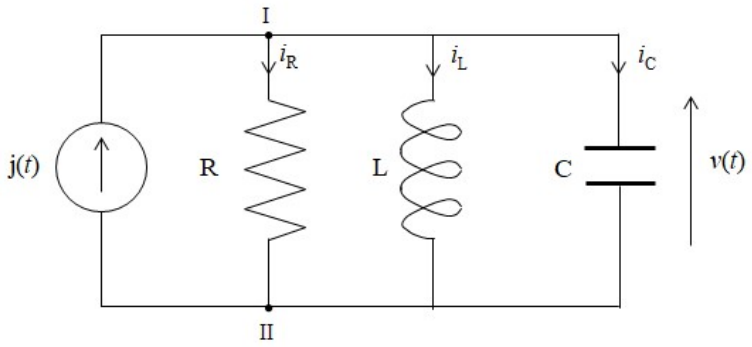


Fig. 8.21 – Il circuito RLC parallelo.

Anche in questo caso, immaginiamo che la pulsazione del generatore j(t) del circuito non sia fissata (vedi § 6 per un approfondimento) e scriviamo:

$$\mathrm{j}(\omega,t) = \mathrm{J_M}\cos(\omega t) \tag{8.110}$$

Il fasore corrispondente alla corrente (8.110) sarà, grazie alla (8.2):

$$\overline{\mathrm{J}} = \mathrm{J_M} \tag{8.111}$$

che non dipende, nel dominio dei fasori, dalla pulsazione ω.

Osservando il circuito di Fig. 8.16, vediamo che il generatore vede l'ammettenza equivalente $\dot{\mathrm{Y}}_{\mathrm{eq}}$:

$$\dot{\mathrm{Y}}_{\mathrm{eq}}(j\omega) = \mathrm{Y_{eq}}(\omega)e^{j\varphi_{\mathrm{Y}}(\omega)} = \frac{1}{\mathrm{R}} + j\left(\omega\mathrm{C} - \frac{1}{\omega\mathrm{L}}\right) \tag{8.112}$$

che è l'ammettenza equivalente del parallelo del resistore, dell'induttore e del condensatore. Il modulo dell'ammettenza (8.112):

$$Y_{eq}(\omega) = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} \tag{8.113}$$

e la fase:

$$\varphi_z(\omega) = \operatorname{arctg}\left(R\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)\right) \tag{8.114}$$

La tensione, che possiamo osservare nell'unico parallelo presente, avrà la seguente generica espressione nel dominio del tempo:

$$v(\omega, t) = V_M \cos(\omega t + \alpha_v) \tag{8.115}$$

Il fasore della tensione $v(t)$ possiamo scriverlo come:

$$\bar{V}(j\omega) = V_M(\omega) e^{j\alpha_v(\omega)} = \frac{\hat{J}}{\dot{Y}_{eq}(j\omega)} \tag{8.116}$$

Nella (8.116) vediamo che, grazie alla dipendenza dal parametro ω dell'ammettenza $\dot{Y}_{eq}(j\omega)$, anche il fasore della corrente dipende da tale parametro.

Il modulo del fasore tensione (8.116), grazie alla (8.113), è:

$$V_M(\omega) = \frac{J_M}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}} = \frac{J_M}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(X_C + \frac{1}{X_L}\right)^2}} \tag{8.117}$$

e la fase del fasore tensione (8.116), grazie alla (8.114), è:

$$\alpha_v(\omega) = -\varphi_Y(\omega) = -\text{arctg}\left(R\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)\right) = \text{arctg}\left(R\left(\frac{1}{X_C} + \frac{1}{X_L}\right)\right) \qquad (8.118)$$

Consideriamo, ora, l'andamento del modulo della tensione (8.117), V_M, al variare della pulsazione ω. È immediato verificare che il valore del modulo V_M tende a zero per ω –> 0 e per ω –> $+\infty$, come mostrato in Fig. 8.22, mentre la fase (8.99) assume valore pari a π/2 per ω –> 0 e –π/2 per ω –> $+\infty$ come mostrato in Fig. 8.23.

Il modulo della tensione assume il suo valore massimo in corrispondenza della pulsazione caratteristica del circuito:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad (8.119)$$

che risulta uguale a quello del circuito RLC serie, (8.100)! Ricordiamo che la pulsazione (8.119) prende il nome di ***pulsazione di risonanza*** del circuito. Quando alimentiamo il circuito con un generatore di pulsazione uguale a quella di risonanza, ω_0, abbiamo che il modulo del fasore tensione presenta il suo valore massimo ammissibile pari a:

$$V_M(\omega_0) = RJ_M \qquad (8.120)$$

mentre la sua fase assume il valore:

$$\alpha_i(\omega_0) = -\text{arctg}(R \times 0) = 0 \qquad (8.121)$$

Inoltre, riscrivendo la fase (8.121) nel modo che segue:

$$\alpha_i(\omega) = -\text{arctg}\left(\omega RC\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)\right) \qquad (8.122)$$

si osserva facilmente che per $\omega < \omega_0$ la fase è positiva e la reattanza equivalente è di tipo capacitivo, mentre per $\omega > \omega_0$ la fase è negativa e la reattanza equivalente è di tipo induttivo.

Il grafico del modulo della corrente (8.117) lo abbiamo mostrato in Fig. 8.22, dove abbiamo considerato sull'asse delle ordinate i valori normalizzati al valore massimo RJ_M. Si osservi come la funzione va a zero in corrispondenza di una pulsazione nulla e di quella tendente all'infinito e come assume un massimo in corrispondenza della pulsazione ω_0, assumendo un andamento di tipo "a campana".

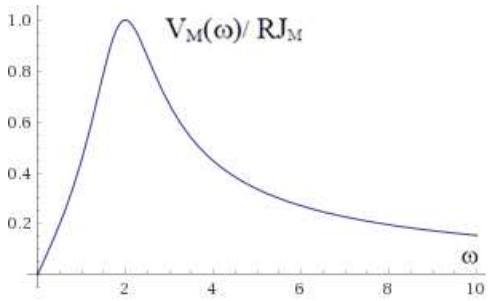


Fig. 8.22 – Andamento del modulo del fasore della tensione (8.117) in funzione della pulsazione ω.

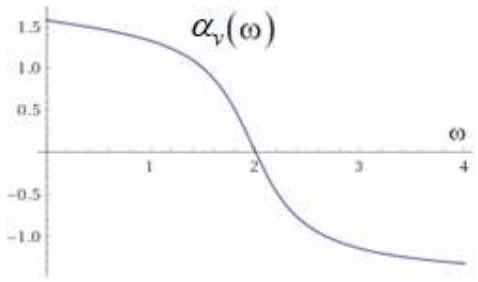


Fig. 8.23 – Andamento della fase del fasore della tensione (8.118) in funzione della pulsazione ω.

Vediamo quali sono le proprietà che si manifestano quando il circuito si trova in risonanza.

È facile verificare dalla (8.112) che in risonanza, e cioè per $\omega=\omega_0$, la parte immaginaria dell'ammettenza $\dot{Y}_{eq}$ è uguale a zero, essendo infatti la reattanza del condensatore opposta rispetto a quella dell'induttore:

$$\omega = \omega_0 \quad \Rightarrow \quad \omega L = \frac{1}{\omega C} \quad \Rightarrow \quad X_L = -X_C \tag{8.123}$$

e quindi l'impedenza risulta puramente resistiva. In questo caso, il modulo di $\dot{Y}_{eq}$ (8.113) assume il valore minimo e la sua fase (8.114) è nulla.

Dalla (8.123), deduciamo che alla risonanza si verifica che la corrente del condensatore $\bar{I}_C$ è l'opposto di quella dell'induttore $\bar{I}_L$:

$$\bar{I}_L(\omega_0) = \frac{\bar{V}(\omega_0)}{jX_L(\omega_0)} = -\frac{\bar{V}(\omega_0)}{jX_C(\omega_0)} = -\bar{I}_C(\omega_0) \tag{8.124}$$

e quindi il parallelo dei due elementi dinamici si comporta complessivamente come un circuito aperto e, allo stesso tempo, la corrente sul resistore è uguale a quella del generatore: $\bar{I}_R = \bar{J}$. In particolare, si ha:

$$I_{L_M}(\omega_0) = I_{C_M}(\omega_0); \quad \alpha_{i_L} = \alpha_{i_C} + \pi \tag{8.125}$$

I moduli sono uguali e le fasi differiscono per π.

Da un punto di vista energetico possiamo osservare che la potenza fornita dal generatore viene assorbita unicamente dal resistore senza che venga immagazzinata alcuna sua parte nei due elementi dinamici. L'induttore e il condensatore, infatti, alla risonanza si scambiano continuamente energia tra loro senza che venga coinvolta la sorgente. In definitiva, alla pulsazione di risonanza il circuito, rispetto alla corrente che lo alimenta, si comporta come se fosse puramente ohmico.

Esaminiamo, infine, il rapporto tra il valor massimo dei moduli delle correnti (8.124), in condizioni di risonanza, degli elementi conservativi (rispetto all'energia) e il valore massimo della correnti del generatore. Lo facciamo ad esempio per il solo condensatore:

$$\frac{I_{L_M}(\omega_0)}{J_M} = \frac{I_{C_M}(\omega_0)}{J_M} = \frac{\omega_0 C V_M(\omega_0)}{V_M(\omega_0)/R} = \omega_0 RC = Q \qquad (8.126)$$

dove Q si chiama ***fattore di qualità*** del circuito risonante. Esso può assumere qualsiasi valore anche >1. Osserviamo che $Q>>1$ ($\omega_0 C>>1/R$), allora la corrente nell'induttore e nel condensatore può assumere valori molto elevati nonostante la sorgente abbia un valore massimo esiguo. Ciò dipende dal valore della pulsazione di risonanza rispetto alla costante L/R. Il circuito in risonanza può diventare pericoloso nonostante l'utilizzo di piccoli valori per il modulo della corrente del generatore.

Come abbiamo visto per il circuito RLC serie, il fattore di qualità Q tiene conto della forma del grafico a campana di Fig. 8.22. All'aumentare del fattore Q, avendo fissato ω_0, la curva a campana relativa al modulo (della tensione in questo caso) diventa più stretta e quindi più selettiva mentre la curva relativa alla fase diventa più pendente. La variazione del parametro ***Q*** descrive le ***curve universali di risonanza***.

5.3 I circuiti con elementi in risonanza

In questo paragrafo risolveremo due circuiti in regime sinusoidale nei quali i due elementi reattivi, condensatore e induttore, si trovano in risonanza.

Studieremo due circuiti, entrambi con due soli elementi reattivi, un condensatore e un induttore. Gli elementi reattivi si troveranno tra loro in serie o in parallelo. Nel circuito ci possono essere anche diversi resistori e generatori, ma sappiamo che è sempre possibile determinare un circuito equivalente (Thevenin o Norton; vedi § 2.4) al sotto–circuito in cui sono inclusi tutti i resistori e i generatori affinchè il circuito originale diventi un RLC serie o un RLC parallelo.

Ricordandoci che, come visto per i circuiti RLC serie e parallelo in risonanza, quando siamo nella condizione in cui le reattanze dei due elementi sono uguali e opposte, e cioè $X_L = -X_C$, possiamo affermare che:

- se i due bipoli sono in serie, la loro serie si comporta come un corto circuito;
- se i due bipoli sono in parallelo, il loro parallelo equivale ad un circuito aperto.

In particolare, nel caso dell'RLC serie in risonanza abbiamo che il carico visto dal generatore è puramente resistivo perché la parte reattiva della corrente complessiva è nulla. La somma delle tensioni dei bipoli dinamici è nulla e il generatore "non si accorge" della loro presenza. Analogamente, nel caso dell'RLC parallelo in risonanza abbiamo che il carico visto dal generatore è puramente resistivo e la somma delle due correnti dei bipoli è nulla. Ma osserviamo che: nell'RLC serie in risonanza, pur essendo nulla la somma delle tensioni sulla serie dei bipoli reattivi si assiste al passaggio di corrente; dualmente, per l'RLC parallelo pur essendo nulla la somma delle due correnti dei bipoli reattivi, si può misurare una tensione non nulla ai capi del parallelo.

Per rimarcare quanto appena detto, guardiamo la Fig. 8.24 e assumiamo che sia verificato $X_L = -X_C$. Possiamo scrivere:

$$X_L \bar{I}_s = -X_C \bar{I}_s \rightarrow \bar{V}_{sL} = -\bar{V}_{sC} \rightarrow \bar{V}_s = 0;\ \bar{I}_s \neq 0 \tag{8.127}$$

e quindi avrà senso calcolare la corrente diversa da zero che attraversa la serie dei due bipoli.

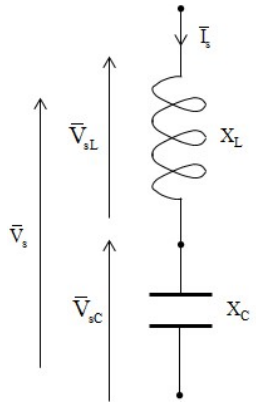


Fig. 8.24 – Reattanze in risonanza serie.

Analogamente, guardiamo la Fig. 8.25 e scriviamo:

$$\frac{\bar{V}_p}{X_L} = -\frac{\bar{V}_p}{X_C} \rightarrow \bar{I}_{pL} = -\bar{I}_{pC} \rightarrow \bar{I}_p = 0;\ \bar{V}_p \neq 0 \tag{8.128}$$

e quindi avrà senso calcolare la tensione diversa da zero che esiste sul parallelo dei due bipoli.

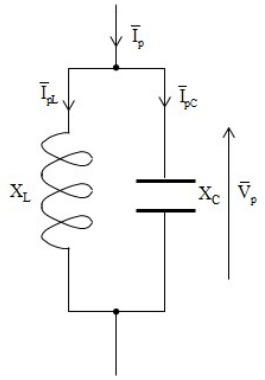


Fig. 8.25 – Reattanze in risonanza parallelo.

Per concludere affermiamo che, qualora dovessimo imbatterci in un circuito del II ordine a regime sinusoidale in risonanza con i due elementi reattivi in serie o in parallelo, possiamo sostituire, rispettivamente, un corto circuito alla serie e un circuito aperto al parallelo tenendo conto che nel primo caso le singole tensioni NON sono nulle e nel secondo caso le singole correnti NON sono nulle.

Nei prossimi due esercizi applicheremo quanto detto.

5.3.1 Esercizio: risonanza serie

Consideriamo il circuito di Fig. 8.26.

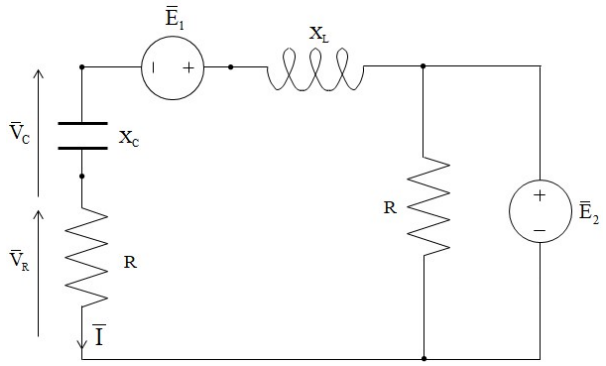


Fig. 8.26 – Circuito con elementi in risonanza serie.

Vogliamo determinare il fasore $\overline{I}$ e il fasore $\overline{V}_C$. I dati del problema sono:

DATI: $\overline{E}_1=3$; $\overline{E}_2=j30$; $X_L=10\ \Omega$; $X_C=-10\ \Omega$; $R=10\Omega$.

Osserviamo che, come abbiamo detto nel § 3 della Lezione 2, è possibile invertire la posizione di due bipoli in serie. Nel circuito di Fig. 8.26 possiamo invertire il generatore ideale di tensione con il condensatore. Così operando possiamo pervenire al circuito di Fig. 8.27. In questo modo è più facile convincersi che i due bipoli reattivi in serie si comportano come un complessivo corto−circuito ottenendo il circuito di Fig. 8.28.

Volendoci convincere analiticamente del perché è possibile sostituire il circuito di Fig. 8.28 a quello di Fig. 8.27, consideriamo la maglia indicata in Fig. 8.27 con la linea tratteggiata rossa e scriviamo per essa la II LdK:

$$\overline{V}_R+jX_C\overline{I}_p+\overline{E}_1+jX_L\overline{I}_p-\overline{E}_2=0 \tag{8.129}$$

Tenendo conto che $X_C=-X_L$ possiamo riscrivere la (8.127) come:

$$\overline{V}_R=-\overline{E}_1+\overline{E}_2 \tag{8.130}$$

Essendo poi:

$$\overline{V}_R=R\overline{I}_R \tag{8.131}$$

ricaviamo:

$$\overline{I}=\frac{\overline{E}_2-\overline{E}_1}{R}=-0,3+j3 \tag{8.132}$$

Nel risolvere analiticamente questo circuito abbiamo visto come agisce la risonanza serie: i due elementi reattivi non si trovano in serie ma la somma delle loro tensioni dà comunque un contributo nullo alla equazione della maglia considerata (quella indicata dalla linea tratteggiata rossa di Fig. 8.27).

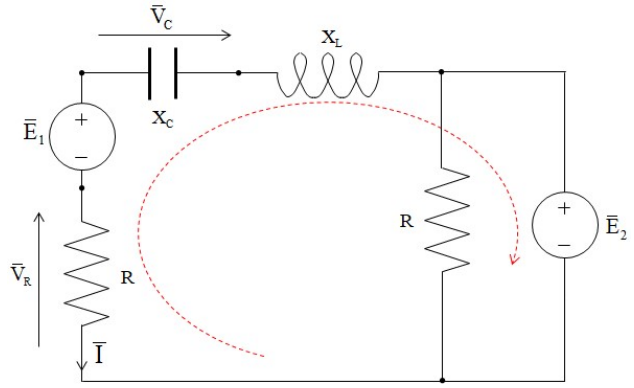


Fig. 8.27 – Circuito equivalente a quello di Fig. 8.26.

L'esercizio ci chiede di calcolare anche il fasore $\bar{V}_C$. Se, dimentichi del circuito d'origine, guardassimo quello di Fig. 8.28, potremmo erroneamente concludere che il fasore della tensione sul condensatore sia nullo. Dobbiamo imparare che la risposta dovrebbe tener conto della presenza dei due bipoli reattivi anche se non condizionano il valore delle altre grandezze presenti nel circuito. Detto in altre parole i due bipoli ci sono ma non si vedono!

Calcoliamo quindi $\bar{V}_C$. Dalla Fig. 8.27 è immediato ricavare che:

$$\bar{V}_C = -jX_C\bar{I} = -10\,j(-0,3+j3) = 3-30\,j \neq 0 \qquad (8.133)$$

E quindi abbiamo risolto l'esercizio! 😊

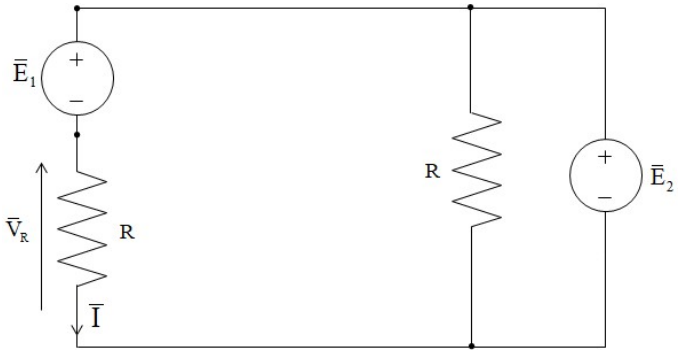


Fig. 8.28 – Circuito equivalente a quello di Fig. 8.27 quando si trova nella condizione di risonanza.

5.3.2 Esercizio: risonanza parallelo

Consideriamo ora il circuito di Fig. 8.29 dove i due bipoli reattivi si presentano in parallelo. Vogliamo determinare il fasore della tensione $\bar{V}$ e quello della corrente $\bar{I}_C$. I dati del problema sono:

DATI: $\bar{E} = j30$; $X_L=10\ \Omega$; $X_C=-10\ \Omega$; $R_1=10\Omega$; $R_2=10\Omega$.

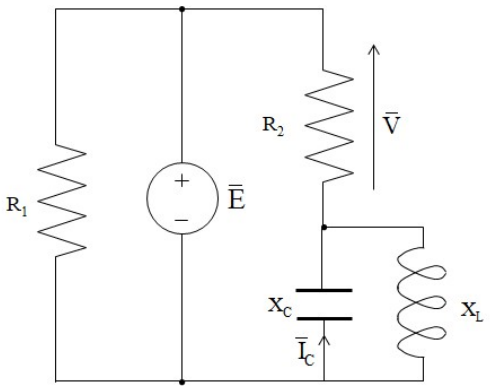


Fig. 8.29 – Circuito con elementi in risonanza parallelo.

I due bipoli reattivi si trovano in risonanza e quindi si comportano come un bipolo circuito aperto. Possiamo quindi calcolare una grandezza diversa da quelle che riguardano i bipoli reattivi, considerando il circuito di Fig. 8.30 equivalente, in condizioni di risonanza, a quello di Fig. 8.29. Osservando questa figura risulta evidente che:

$$\bar{V}=R\bar{I}=0 \tag{8.134}$$

dove il fasore della corrente $\bar{I}$ è quella che attraversa la resistenza ed è nulla poiché la resistenza si trova in serie ad un "circuito aperto".

Volendo poi calcolare il fasore della corrente $\bar{I}_C$, dobbiamo fare riferimento alla Fig. 8.29 e non alla Fig. 8.30. Tuttavia, per calcolare la corrente nel condensatore ci occorre conoscere la tensione sul parallelo dei bipoli reattivi. Tale tensione è la tensione a vuoto $\bar{V}_0$ che abbiamo rappresentato in Fig. 8.30:

$$\bar{V}_0=\bar{E}=30j \tag{8.135}$$

e dunque:

$$\bar{I}_C=\frac{\bar{E}}{-jX_C}=\frac{30j}{-10j}=-3\neq 0 \tag{8.136}$$

Quindi possiamo osservare come, nonostante il parallelo sia equivalente ad un circuito aperto, la corrente nei due bipoli reattivi in risonanza sia diversa da zero.

L'esercizio è risolto! 😊

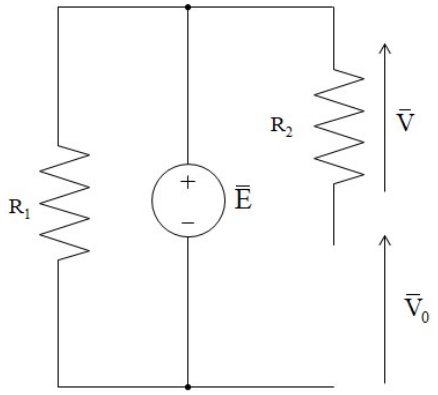


Fig. 8.30 – Circuito equivalente al circuito di Fig. 8.29 quando si trova in risonanza.

6 L'analisi in frequenza di un circuito*

In questo paragrafo vogliamo indagare le proprietà di un circuito lineare e tempo-invariante a regime alimentato da un unico generatore sinusoidale che ha ampiezza e fase fissate e pulsazione variabile ω:

$$g(\omega,t) = \mathrm{G_M}\cos(\omega t + \alpha_g) \tag{8.137}$$

Avendo supposto ω variabile nella (8.137), dobbiamo ammettere, grazie all'isomorfismo di tutte le grandezze del circuito con quella del generatore, che tutte le grandezze siano dipendenti dalla pulsazione ω:

$$x(\omega,t) = \mathrm{X_M}\cos(\omega t + \alpha_x) \tag{8.138}$$

Lo studio dei circuiti quando le grandezze sono dipendenti dalla frequenza, come nella (8.138), si chiama ***analisi in frequenza*** ed è effettuata utilizzando un approccio sistemico ingresso–uscita (vedi § 3.1 della Lezione 6) nel dominio simbolico nel quale la pulsazione ω è considerata variabile. In tali contesti si definiscono la ***risposta in frequenza*** e la ***funzione di rete*** che descriveremo nel prossimo paragrafo.

6.1 La risposta in frequenza e la funzione di rete

Per introdurre la risposta in frequenza e la funzione di rete risulta necessario descrivere il circuito con un approccio di tipo sistemistico: concepiamo il circuito come un sistema ingresso–uscita come in Fig. 8.31. L'uscita $x(t)$ può essere una qualsiasi grandezza del circuito (tensione o corrente).

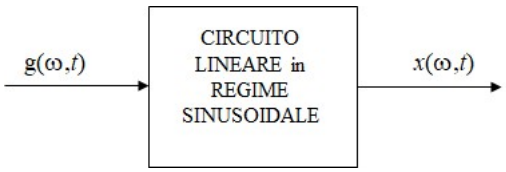


Fig. 8.31 – Il circuito come sistema ingresso-uscita.

Trasformiamo, ora, il circuito considerato in Fig. 8.31 nel dominio dei fasori e facciamo riferimento alla Fig. 8.32. Osserviamo che il fasore del generatore, $\bar{G}$, non dipende dalla pulsazione ω, a differenza del fasore dell'uscita, $\bar{X}(j\omega)$, che dipende dalla pulsazione e in particolare dal numero complesso $j\omega$ in quanto, in generale, le impedenze presenti nel circuito dipendono da $j\omega$ potendo essere relative a induttori ($j\omega L$) e condensatori ($1/j\omega C$). Nel seguito questo punto sarà chiarito quando troveremo l'espressione della $\bar{X}(j\omega)$ in funzione dell'ingresso $\bar{G}$.

Fig. 8.32 – Il circuito come sistema ingresso-uscita nel dominio dei fasori.

Vogliamo dunque individuare la relazione che lega il fasore di uscita $\bar{X}(j\omega)$ al fasore d'ingresso $\bar{G}$. Abbiamo detto che nel dominio dei fasori operiamo in modo uguale a quanto facciamo per i circuiti resistivi, con l'unica differenza che considerando impedenze al posto dei resistori trattiamo con i numeri complessi. Lavorando con impedenze e utilizzando gli stessi strumenti introdotti nella Lezione 4 per i circuiti resistivi (come le impedenze equivalenti serie-parallelo e i partitori), è sempre possibile riuscire ad individuare una relazione tra il fasore di uscita $\bar{X}(j\omega)$ e il fasore dell'ingresso $\bar{G}$. La relazione sarà del tipo:

$$\bar{X}(j\omega) = H(j\omega)\bar{G} \qquad (8.139)$$

Dove la cosiddetta ***funzione di rete*** H=H($j\omega$) è una funzione dipendente da $j\omega$ in quanto derivante da impedenze e ammettenze del generico circuito del tipo $j\omega L$ o $1/j\omega C$. La $\bar{X}(j\omega)$ è la cosiddetta ***risposta in frequenza*** del circuito. Nella (8.139) osserviamo che

sebbene il fasore $\bar{G}$ non dipende da $j\omega$, grazie alla presenza della funzione $H(j\omega)$, l'uscita dipenderà da $j\omega$.

In tutta la presente Lezione ci siamo abituati al fatto che in un regime sinusoidale la pulsazione è fissata mentre è stata considerata variabile solo quando abbiamo studiato il fenomeno della risonanza (vedi le (8.97) e (8.116)). In questo paragrafo vogliamo studiare, attraverso un'***analisi in frequenza***, la dipendenza della ***funzione di rete*** $H(j\omega)$, e quindi della ***risposta in frequenza*** $\bar{X}(j\omega)$, dalla pulsazione ω.

È facile convincersi che la funzione di rete $H(j\omega)$ è una funzione complessa del tipo rapporto di polinomi in ω. La funzione di rete NON è un fasore così come non lo sono l'impedenza e l'ammettenza. Consideriamo il tipo di uscita: tensione $\bar{V}_{out} = \bar{V}_{out}(j\omega)$ o corrente $\bar{I}_{out} = \bar{I}_{out}(j\omega)$; consideriamo il tipo di generatore di corrente $\bar{J}$ o di tensione $\bar{E}$. Abbiamo quattro possibili legami:

$$\begin{aligned} &\bar{V}_{out}(j\omega) = H(j\omega)\bar{E}\,;\ \bar{V}_{out}(j\omega) = H(j\omega)\bar{J}\,; \\ &\bar{I}_{out}(j\omega) = H(j\omega)\bar{E}\,;\ \bar{I}_{out}(j\omega) = H(j\omega)\bar{J} \end{aligned} \tag{8.140}$$

Nel secondo caso la funzione di rete si chiama ***funzione impedenza***, nel terzo caso si chiama ***funzione ammettenza***. Negli altri casi la funzione di rete è adimensionale. Una volta trovata la funzione di rete bisogna tenere conto che, essendo le funzioni di rete quantità complesse, vanno esplicitate in modulo e fase.

Una cosa importante da sottolineare è che la funzione di rete, essendo il rapporto tra uscita ed ingresso del sistema Fig. 8.32, varia la sua forma a seconda della grandezza che scelgo come uscita del sistema. Per fare un esempio, consideriamo l'RLC serie. Se scegliamo come uscita la corrente della maglia (come abbiamo fatto nel § 5.1) abbiamo, dalla (8.97), la seguente funzione di rete:

$$\mathrm{H}(j\omega)=\frac{1}{\dot{\mathrm{Z}}_{\mathrm{eq}}(j\omega)}=\frac{1}{\mathrm{R}+j\left(\omega\mathrm{L}-\dfrac{1}{\omega\mathrm{C}}\right)} \tag{8.141}$$

Ma se scegliamo come grandezza d'uscita la tensione sull'induttore, abbiamo:

$$\mathrm{H}(j\omega)=\frac{j\omega\mathrm{L}}{\dot{\mathrm{Z}}_{\mathrm{eq}}(j\omega)}=\frac{j\omega\mathrm{L}}{\mathrm{R}+j\left(\omega\mathrm{L}-\dfrac{1}{\omega\mathrm{C}}\right)} \tag{8.142}$$

che, evidentemente, è diversa dalla (8.141)!

La funzione di rete è una funzione complessa dotata di modulo e fase. Possiamo quindi scrivere

$$\mathrm{H}(j\omega)=\left|\mathrm{H}(\omega)\right|\mathrm{e}^{j\varphi(\omega)} \tag{8.143}$$

dove $\left|\mathrm{H}(\omega)\right|$ si chiama ***risposta in ampiezza*** della funzione di rete e $\varphi(\omega)$ si chiama ***risposta in fase*** della funzione di rete.

Dalla (8.139) e dalla (8.143) deriva la seguente espressione per la risposta in frequenza:

$$\bar{\mathrm{X}}(j\omega)=\left|\mathrm{H}(\omega)\right|\mathrm{e}^{j\varphi(\omega)}\bar{\mathrm{G}} \tag{8.144}$$

Possiamo visualizzare il grafico della risposta in ampiezza e in fase della (8.143) e possiamo quindi visualizzare il grafico dell'ampiezza e della fase del segnale di uscita del circuito (8.144) in funzione della pulsazione del generatore ω. Lo abbiamo già fatto in precedenza nelle Fig. 8.17 e Fig. 8.18 del circuito RLC serie in risonanza e nelle Fig. 8.22 e Fig. 8.23 nel circuito RLC parallelo in risonanza.

Vogliamo, a questo punto, mettere in evidenza le capacità di ***filtraggio*** della funzione di rete e individuare, quindi, le caratteristiche "filtranti" dei circuiti. Facendo un'analisi in frequenza della risposta in ampiezza della (8.143), possiamo ottenere un grafico come quello di Fig. 8.33 (per semplicità abbiamo scelto il valore unitario come valore

massimo). La risposta in frequenza è consistente per valori piccoli della pulsazione ω e tende a zero al suo aumentare.

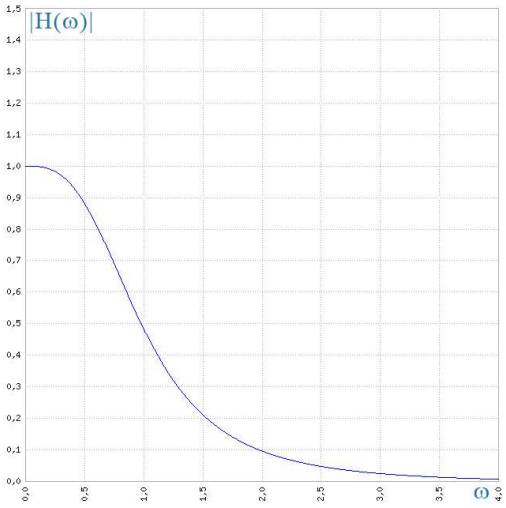


Fig. 8.33 – Possibile grafico della risposta in ampiezza (il modulo della (8.143)) della funzione di rete.

Per evidenziare come la risposta in ampiezza della funzione di rete operi da filtraggio del segnale d'ingresso, consideriamo un segnale d'ingresso che sia la somma di dieci segnali sinusoidali di diversa arbitraria pulsazione ω_i con i=1,2,… 10. In generale un segnale elettrico periodico può essere modellato come sovrapposizione di infinite funzioni sinusoidali di una data frequenza. L'analisi in frequenza di un tale segnale mostra il cosiddetto ***spettro del segnale***. Esso può essere relativo all'ampiezza (***spettro di ampiezza***) e alla fase (***spettro di fase***). Nel caso. che stiamo esaminando. di segnale composto da 10 sinusoidi di pulsazione ω_i con i=1,2,… 10, possiamo considerare, nel dominio simbolico, lo ***spettro di ampiezza del segnale*** d'ingresso in un piano cartesiano avente in ascissa la pulsazione ω. Nel grafico, la sinusoide nel dominio del tempo avente una certa pulsazione ω_i, trasformata nel dominio simbolico, viene rappresentata mediante una freccia che punta verso l'alto, collocata in corrispondenza della pulsazione ω_i, e di ampiezza pari al valore massimo della sinusoide. Abbiamo mostrato un esempio nella Fig. 8.34 in cui le cosiddette ***righe spettrali*** sono mostrate in colore verde. Nello stesso grafico abbiamo mostrato la risposta in ampiezza della funzione di rete già mostrata in Fig. 8.33. Un analogo grafico può mostrare lo spettro di fase del segnale.

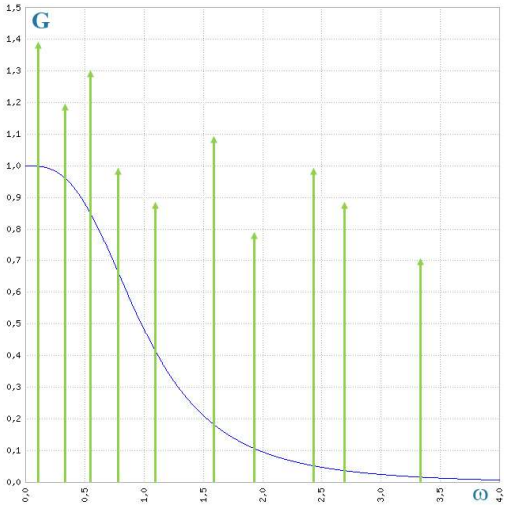


Fig. 8.34 – Spettro in frequenza dell'ampiezza del segnale d'ingresso.

Considerando che, dalla (8.144), il segnale d'uscita ha un modulo pari a $X(\omega) = |H(\omega)|G$, possiamo concludere che lo spettro d'ampiezza del segnale d'uscita sarà quello mostrato in Fig. 8.35. Osserviamo che la funzione di rete "lascia passare" le righe spettrali del segnale d'ingresso per frequenze piccole e attenua quelle per frequenze crescenti. Questa azione la possiamo considerare di filtraggio e, in questo caso, possiamo dire che il circuito si comporta come un filtro nei confronti della uscita considerata. Nel caso appena considerato esso si comporta come un ***filtro passa–basso***.

Nel § 5 che riguarda i circuiti RLC serie e parallelo abbiamo utilizzato la funzione di rete impedenza (vedi la (8.97)) e ammettenza (vedi la (8.116)) e abbiamo visto che la risposta in ampiezza (vedi Fig. 8.17 e Fig. 8.22[13]) realizza un ***filtro passa–banda***.

[13] Nelle figure citate abbiamo rappresentato il modulo dell'uscita (la corrente della maglia nell'RLC serie e la tensione del parallelo nell'RLC parallelo), ma questi grafici coincidono con la risposta in ampiezza della funzione di rete $1/Z_{eq}(\omega)$ per l'RLC serie (vedi la (8.98) e $1/Y_{eq}(\omega)$ per l'RLC parallelo (vedi la (8.117).

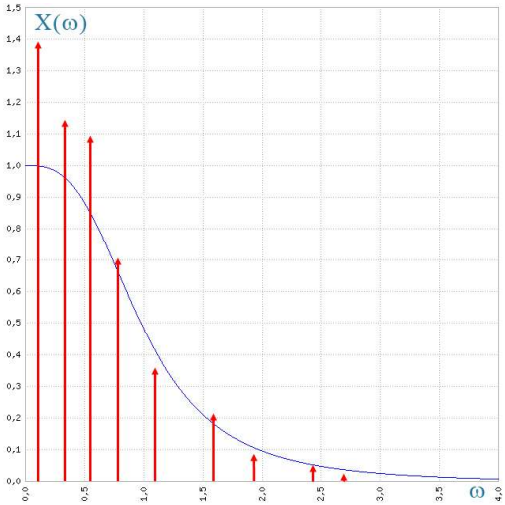


Fig. 8.35 – Spettro in frequenza dell'ampiezza del segnale in uscita.

Le caratteristiche filtranti di alcuni circuiti hanno suggerito l'impiego di particolari componenti elettronici chiamati ***filtri passivi***, che descriveremo nel prossimo paragrafo.

6.2 I filtri passivi

In elettronica un ***filtro*** è un dispositivo che realizza delle funzioni di trasformazione dei segnali. In particolare, la sua funzione può essere quella di filtrare determinate frequenze di un segnale[14], lasciando passare le frequenze più alte o più basse di un valore determinato, o quelle comprese in un intervallo prestabilito.

I tipi più comuni di filtri elettronici sono lineari, e in molti casi sono dei sistemi risonanti. Quindi la realizzazione più semplice di un filtro lineare è basata sulla semplice combinazione di resistori, condensatori e induttori. Questi filtri sono i circuiti RC, RL, LC e RLC. Nel loro complesso sono chiamati ***filtri passivi***, perché il loro funzionamento non dipende da una fonte di alimentazione esterna.

Gli induttori bloccano i segnali ad alta frequenza e lasciano passare quelli a bassa frequenza, mentre il condensatore si comportano in maniera opposta. Ad esempio, un

[14] Ricordiamo che un segnale elettrico periodico può essere modellato come sovrapposizione di infinite funzioni sinusoidali di una data frequenza. L'analisi in frequenza di un tale segnale mostra il cosiddetto ***spettro*** del segnale. Esso può essere relativo all'ampiezza (***spettro di ampiezza***) e alla fase (***spettro di fase***).

filtro in cui il segnale passa attraverso un induttore presenta una minore attenuazione ai segnali a bassa frequenza che a quelli ad alta frequenza ed è un filtro passa basso. Se il segnale passa attraverso un condensatore allora il filtro presenta un'attenuazione minore per i segnali ad alta frequenza che per quelli a bassa frequenza, ed è un filtro passa alto. I resistori da parte loro non hanno la proprietà di selezionare le frequenze, ma sono aggiunti a condensatori e induttori per determinare le costanti di tempo del circuito, e quindi le frequenze a cui essi rispondono.

Nel § 5 abbiamo mostrato le proprietà che hanno i circuiti risonanti RLC serie e parallelo. Nel prossimo paragrafo metteremo in evidenza il loro comportamento filtrante.

6.2.1 Il filtro passa–banda

Un sistema elettrico si comporta come un filtro passa–banda se lascia passare le frequenze intorno ad una frequenza fissata e attenua le frequenze minori e maggiori lontane da quella fissata. Per manifestare un comportamento filtrante di questo tipo, è necessario che la risposta in ampiezza della funzione di rete abbia un profilo come quello mostrato in Fig. 8.36.

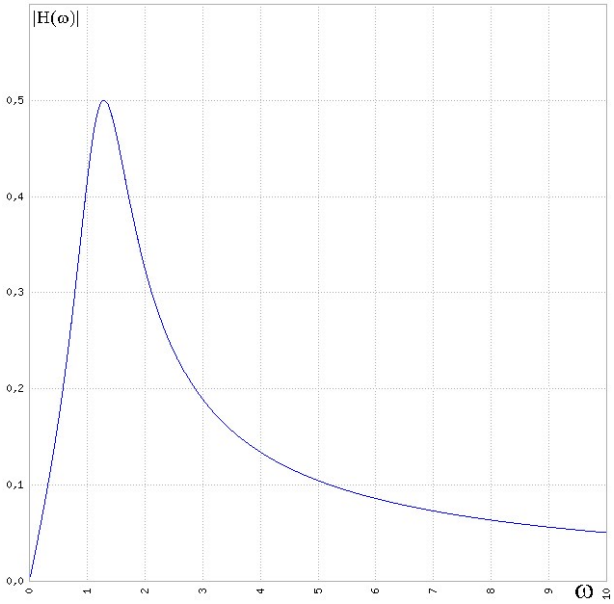


Fig. 8.36 – Risposta in ampiezza di un filtro passa-banda.

Come esempio notevole di filtro passa–banda abbiamo il circuito RLC serie descritto nel § 5.1 come filtro passa–banda quando scegliamo come grandezza d'uscita la corrente della maglia. È immediato convincersi di ciò se si osserva la Fig. 8.19 dove sono rappresentate le curve universali di risonanza di un circuito RLC serie. È possibile osservare nella figura che il circuito filtra solo i segnali in ingresso che sono "sintonizzati" intorno alla frequenza di risonanza. Quando alimento il circuito con un generatore di pulsazione prossima a quella di risonanza il valore del segnale in uscita è apprezzabile, quando la pulsazione del generatore è lontana da quella di risonanza il segnale in uscita risulta attenuato.

Come esempio possiamo considerare la Fig. 8.36 dove la classica curva a "campana" del filtro passa–banda è stata ottenuta con un circuito RLC serie avente i seguenti dati:

DATI: R=2Ω, L=2H, C=0.3F.

Dai dati assegnati ricaviamo la pulsazione di risonanza dalla (8.100):

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2.78 \text{ rad/s} \tag{8.145}$$

Il valore massimo della risposta in ampiezza dalla (8.98):

$$\left|H(\omega_0)\right| = \frac{I_M(\omega_0)}{E_M} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C}\right)^2}} = \frac{1}{R} = 0.5\ \Omega^{-1} \tag{8.146}$$

E il fattore di qualità della curva di risonanza dalla (8.107):

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = 2.78 \tag{8.147}$$

Sappiamo dal § 5.1 che il fattore di qualità (8.147) tiene conto della capacità selettiva del filtro. Maggiore è il suo valore, maggiore è la capacità filtrante del sistema ossia più stretta sarà la curva (vedi Fig. 8.19).

Analogamente potremmo mostrare come l'RLC parallelo esibisca lo stesso comportamento assumendo come grandezza di uscita la tensione sul parallelo.

6.2.2 Il circuito passa–banda come paradigma di una stazione radio ricevente

Il comportamento filtrante del semplice circuito RLC serie (analogamente a quello RLC parallelo) ci suggerisce, almeno da un punto di vista concettuale, un impiego assai interessante. Fino ad ora abbiamo ragionato in questo modo: abbiamo un segnale d'ingresso con un certo spettro in frequenza, abbiamo il nostro circuito RLC, verifichiamo quali sono le frequenze passanti del sistema. In questo paragrafo cambiamo prospettiva: abbiamo ancora un segnale in ingresso dotato di un suo spettro in frequenza, abbiamo il nostro circuito RLC a cui però questa volta possiamo variare i parametri R, L e C: vogliamo filtrare lo spettro in ingresso e selezionare un range di righe spettrali intorno ad una pulsazione assegnata. È il caso, almeno da un punto di vista paradigmatico, di una stazione radio ricevente.

Abbiamo una radio che riceve dall'etere i segnali a frequenza media corrispondenti alle varie stazioni trasmittenti (radio Kiss Kiss, radio Maria, radio RTL, ….), ma siamo interessati ad un segnale in particolare, ad esempio radio Deejay. Ciò che dobbiamo fare è sintonizzarci con la frequenza del segnale desiderato. Ad esempio, se siamo a Milano abbiamo bisogno di sintonizzarci su una della due frequenze 99.7 MHz o107 MHz[15]. Supponendo di avere un sistema avente lo stesso paradigma dell'RLC serie, la sintonizzazione avviene facendo variare i parametri del circuito, quindi i parametri R, L e C. In questo modo, possiamo far "traslare" la risposta in frequenza del sistema ricevente e accordare la pulsazione di risonanza alla frequenza desiderata in maniera più o meno selettiva (variando il fattore di qualità Q). Abbiamo mostrato questo meccanismo selettivo in Fig. 8.37 dove abbiamo variato i parametri del circuito RLC serie del § 5.1, e disegnato il grafico della risposta in ampiezza normalizzata $|H(\omega)|/R$ in tre casi distinti (le tre curve

[15] Si tratta, almeno per le trasmissioni radiofoniche in FM, di onde ad alta frequenza ("VHF" very high frequency) che si usano nelle telecomunicazioni ed hanno una banda di frequenze dello spettro elettromagnetico comprese fra 30 e 300 MHz.

colorate blu, rossa e verde). In particolare, per semplicità abbiamo lasciati invariati i valori di R=1Ω ed L=20nH, e abbiamo variato solo la capacità del condensatore. Abbiamo scelto:

C=0.3 nF, ottenendo la curva blu con pulsazione di risonanza $\omega_1=4.08x10^8$ rad/s.

C=0.1 nF, ottenendo la curva rossa con pulsazione di risonanza $\omega_2=7.07x10^8$ rad/s.

C=0.05 nF, ottenendo la curva verde con pulsazione di risonanza $\omega_3=1x10^9$ rad/s.

Il segnale d'ingresso ha lo spettro costituito, nella figura, da 9 righe spettrali di uguale intensità. Il nostro sistema ne seleziona solo tre (quelle colorate) mentre attenua tutte le altre (quelle grigie). Si osservi dalla figura che nei tre casi distinti riusciremmo a selezionare la stazione radio[16] con pulsazione ω_1 (riga blu), ω_2 (riga rossa) o ω_3 (riga verde).

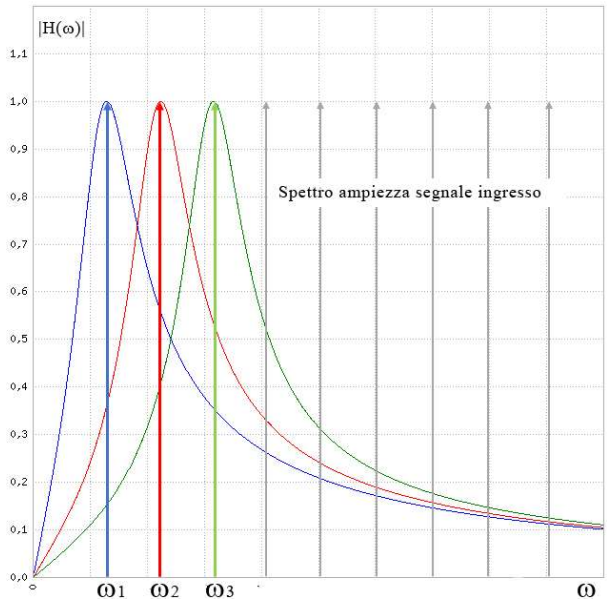


Fig. 8.37 – Risposta in ampiezza e spettro di ampiezza del segnale d'ingresso in una stazione radio ricevente.

[16] Si noti che abbiamo riportato qui le pulsazioni e NON le frequenze! Si lascia allo studente la verifica che trasformando le pulsazioni trovate nelle corrispondenti frequenze (secondo le relazioni note…) siamo all'interno del range tipico delle radio FM.

6.2.3 I filtri passa–basso e passa–alto

Esistono dei sistemi elettrici che possono "tagliare" le frequenze maggiori o quelle minori di una data frequenza assegnata. Nel primo caso si tratta di un filtro passa–basso e nel secondo caso di un filtro passa–alto.

Nel caso di filtro passa–basso, la risposta in ampiezza della funzione di rete del filtro, nel caso più semplice, dovrebbe avere una struttura del tipo:

$$\left|H(\omega)\right| = \frac{\left|H(0)\right|}{\sqrt{1+(\tau\omega)^2}} \tag{8.148}$$

dove τ rappresenta una costante di tempo del circuito che, come risulta evidente, è del I ordine. In Fig. 8.38 abbiamo rappresentato la (8.148) normalizzata al valore $\left|H(0)\right|$ con τ=0.05s.

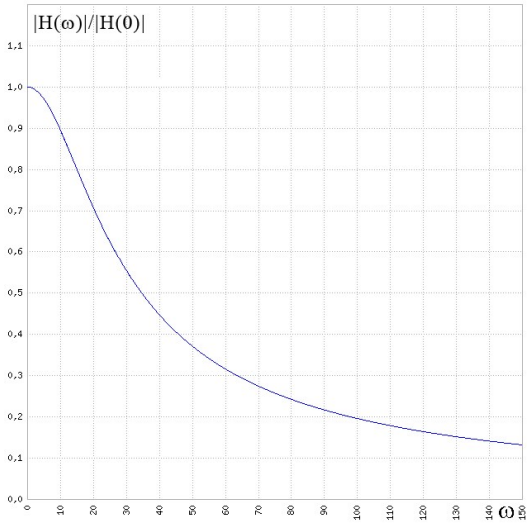


Fig. 8.38 – Risposta in ampiezza di un filtro passa–basso.

Nel caso di filtro passa–alto la risposta in ampiezza della funzione di rete del filtro, nel caso più semplice, dovrebbe avere una struttura del tipo:

$$\left|H(\omega)\right| = \frac{\left|H(\infty)\right|\tau\omega}{\sqrt{1+(\tau\omega)^2}} \tag{8.149}$$

dove τ rappresenta una costante di tempo del circuito che, come risulta evidente, è del I ordine. In Fig. 8.39 abbiamo rappresentato la (8.149) normalizzata al valore $\left|H(\infty)\right|$ con τ=0.05s.

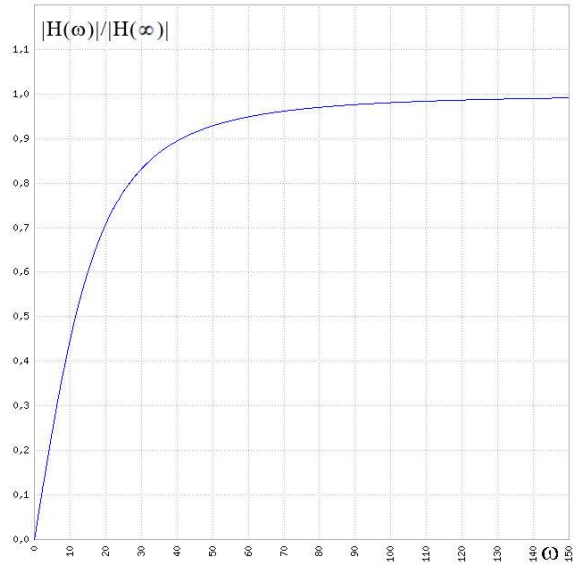


Fig. 8.39 – Risposta in ampiezza di un filtro passa-alto.

Appendici

Appendice 1 – Richiami sulle funzioni sinusoidali

Una funzione $x(t)$ presenta un andamento periodico se per ogni istante t sussiste la relazione:

$$x(t) = x(t + nT) \tag{A.1}$$

con n numero intero qualsiasi e T ***periodo*** della funzione periodica. Il numero di periodi contenuti nell'unità di tempo si dice ***frequenza*** e si misura in Hertz (Hz):

$$f = \frac{1}{T} \tag{A.2}$$

Il valore massimo o ***ampiezza*** della funzione periodica verrà indicato con X_M. Inoltre, è possibile definire per $x(t)$ il ***valore medio*** in un periodo e lo indicheremo con X_m:

$$X_m = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt \tag{A.3}$$

La quantità:

$$X_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)\,dt} \Leftrightarrow X_{eff} = \frac{X_M}{\sqrt{2}} \tag{A.4}$$

verrà detta ***valore efficace*** della grandezza periodica.

Una grandezza periodica si dice ***alternata*** se il valore medio in un periodo è nullo. Un particolare tipo di grandezza alternata è quella ***sinusoidale***:

$$x(t) = X_M \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \alpha_x\right) \tag{A.5}$$

Il rapporto $2\pi/T$ può essere indicato nel seguente modo:

$$\frac{2\pi}{T} = 2\pi f = \omega \tag{A.6}$$

La grandezza ω, legata al periodo T e alla ***frequenza*** f della (A.6) si chiama ***pulsazione*** ed è espressa in rad/s. La grandezza α_x prende il nome di fase iniziale o più semplicemente ***fase*** della funzione sinusoidale.

Per la (A.6) la funzione (A.5) può essere riscritta come:

$$x(t) = X_M \sin(\omega t + \alpha_x) \tag{A.7}$$

Dalla trigonometria ricordiamo che la (A.7) la possiamo anche scrivere come:

$$x(t) = X_M \sin(\omega t + \alpha_x) = X_M \cos\left(\omega t + \alpha_x - \frac{\pi}{2}\right) \tag{A.8}$$

Come esempio, nella Fig. A.1 abbiamo mostrato la funzione sinusoidale $x(t) = 10\sin\left(100t + \frac{\pi}{4}\right)$.

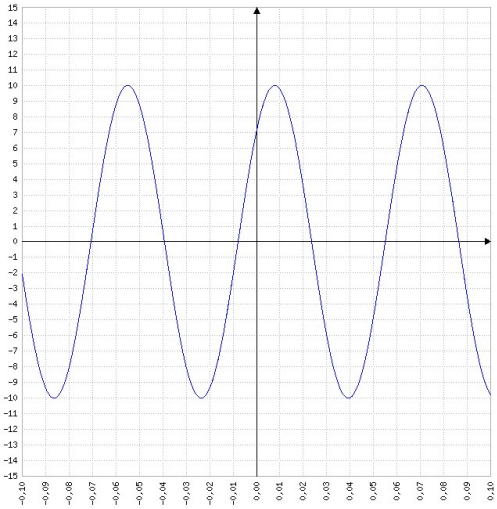


Fig. A.1 – Grafico di una funzione sinusoidale[17].

Ora rappresentiamo graficamente una funzione sinusoidale in maniera diversa. Immaginiamo di avere un vettore di lunghezza pari a X_M e fase iniziale α_x (che per semplicità abbiamo qui assunto pari a zero). Immaginiamo di farlo ruotare intorno ad un punto fisso nel tempo t con una velocità angolare ω. Abbiamo rappresentato in Fig. A.2 tale ***vettore rotante***. L'angolo indicato in figura è pari a ωt. Ebbene, le proiezioni del vettore sugli assi cartesiani sono, rispettivamente, i valori istantanei della funzione $X_M \cos(\omega t)$ sulle ascisse e quelli della funzione $X_M \sin(\omega t)$ sulle ordinate. Essendo vera la (A.6), possiamo dire che il vettore compie un intero giro nell'intervallo di tempo T che rappresenta il periodo temporale delle funzioni sinusoidali.

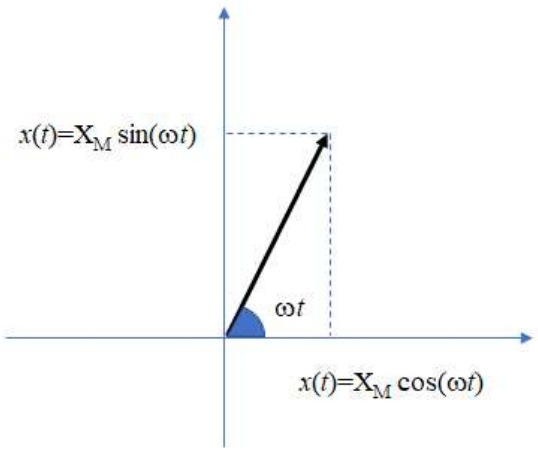


Fig. A.2 – Rappresentazione di una funzione sinusoidale come vettore rotante.

Infine, osserviamo che se consideriamo il prodotto di due funzioni sinusoidali:

$$p(t) = 10\sin\left(100t + \frac{\pi}{4}\right) * 5\sin(100t) \qquad \text{(A.9)}$$

abbiamo il grafico di Fig. A.3 nel quale si può notare la presenza di un valore medio (indicato dalla retta rossa) pari a 17.68. Quindi ne deduciamo che, sebbene il valor medio

[17] Per produrre questo grafico e i seguenti, abbiamo usato la piattaforma https://www.mathe-fa.de/it .

di una sinusoide sia nullo, il valor medio del prodotto di due sinusoidi non è nullo. Questo ci servirà quando, nella Lezione 9, introdurremo la potenza nel regime sinusoidale.

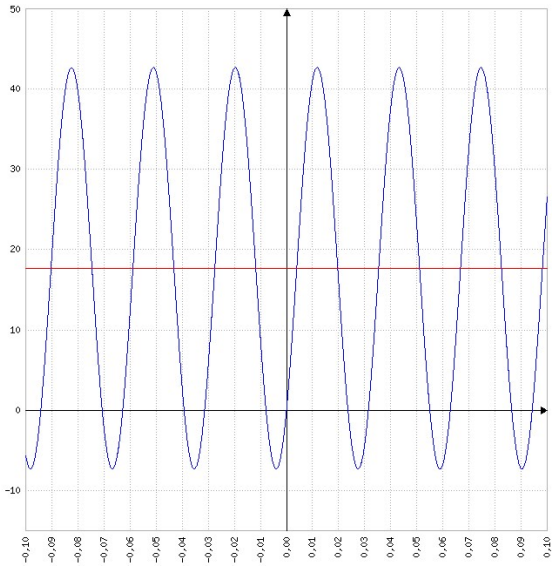


Fig. A.3 – Grafico del prodotto di due funzioni sinusoidali.

Consideriamo ora una funzione somma di due funzioni sinusoidali non aventi la stessa pulsazione e quindi non "isofrequenziali":

$$x(\omega_1,\omega_2,t)=X_{M1}\cos(\omega_1 t+\alpha_{x1})+X_{M2}\cos(\omega_2 t+\alpha_{x2}) \qquad \text{(A.10)}$$

Distinguiamo tre casi:

1) $\omega_2=\omega_1=\omega$

In questo caso la funzione (A.10) è sinusoidale di periodo $T=\frac{2\pi}{\omega}$.

2) $\omega_2=n\omega_1$ con n=2, 3, ...

In questo caso la funzione (A.10) è periodica di periodo $T=\frac{2\pi}{\omega_1}$.

3) $\omega_2 \neq n\omega_1$ con n=1, 2, 3, ...

In questo caso la funzione (A.10) non è una funzione periodica!

Nella Fig. A.4 abbiamo rappresentato graficamente la funzione $2\sin(100t)+3\sin(100t+\frac{\pi}{5})$ che risulta essere sinusoidale di periodo $T=\frac{\pi}{50}$, nella Fig. A.5 abbiamo rappresentato graficamente la funzione $2\sin(100t)+3\sin(200t+\frac{\pi}{5})$ che risulta essere periodica di periodo ancora $T=\frac{\pi}{50}$, e nella Fig. A.6 abbiamo rappresentato graficamente la funzione $2\sin(100t)+3\sin(100\sqrt{2}t+\frac{\pi}{5})$ che visibilmente non risulta periodica.

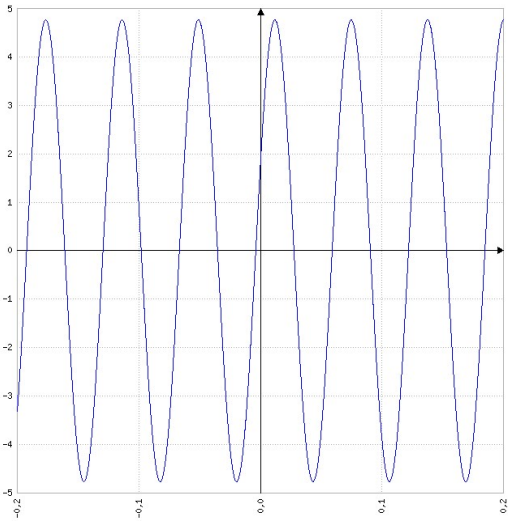


Fig. A.4 – Grafico della funzione (A.10) nel caso sinusoidale.

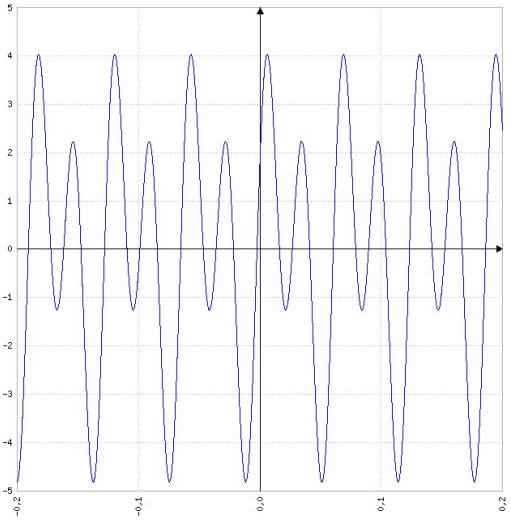


Fig. A.5 – Grafico della funzione (A.10) nel caso periodico.

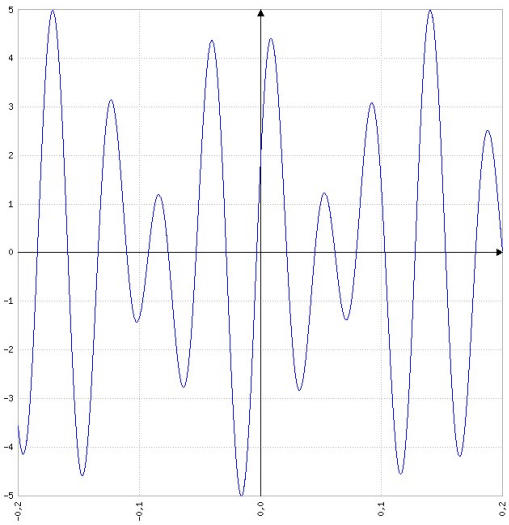


Fig. A.6 - Grafico della funzione (A.10) nel caso aperiodico.

Quanto appena appreso può essere generalizzato al caso di una funzione ottenuta come sovrapposizione di un numero finito di sinusoidi di pulsazioni multiple tra loro, oppure di un numero infinito di sinusoidi di pulsazioni multiple tra loro. In questo ultimo caso si tratta di una ***serie di Fourier***.

Appendice 2 – Richiami sui numeri complessi

In questo paragrafo daremo alcuni utili richiami sui numeri complessi senza alcuna pretesa di completezza.

Introduciamo l'***unità immaginaria***:

$$j = \sqrt{-1} \Rightarrow \left(j\right)^2 = -1 \qquad \text{(A.11)}$$

Come sappiamo la $\sqrt{-1}$ non ha posto nell'insieme dei numeri reali e pertanto l'unità immaginaria viene definita in un insieme più vasto che chiamiamo dei ***numeri complessi***.

L'unità immaginaria j ci consente di "costruire" l'elemento dell'insieme complesso che è formato da una coppia di numeri reali $\{a,b\}$:

$$z=a+jb \tag{A.12}$$

Dove a è la ***parte reale*** del numero complesso e b la ***parte immaginaria***. Si ha:

$$a = Re\{z\},\ b = Im\{z\} \tag{A.13}$$

Il numero complesso $z=a+jb$, essendo composto da una coppia di valori (a,b) si può rappresentare graficamente in un piano, che chiameremo ***piano complesso***, nel quale l'asse delle ascisse è relativo alla parte reale del numero complesso mentre quello delle ordinate è relativo alla parte immaginaria del numero complesso (vedi Fig. A.7).

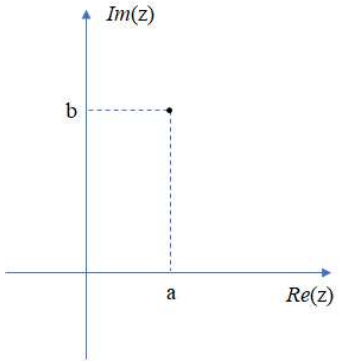


Fig. A.7 – Rappresentazione grafica di un numero complesso nel piano complesso.

Il numero complesso (A.12) è espresso in ***forma cartesiana*** ma possiamo introdurre anche la sua ***forma esponenziale*** che risulta essere:

$$z = Z_M e^{j\alpha_z} \tag{A.14}$$

Dove Z_M rappresenta il ***modulo*** del numero complesso e α_z la ***fase*** del numero complesso.

Che relazione esiste tra la (A.12) e la (A.14)? Ci è utile la ***formula di Eulero***:

$$e^{j\alpha_z} = \cos(\alpha_z) + j\sin(\alpha_z) \tag{A.15}$$

Che sostituita nella (A.14), ci consente di scrivere la ***forma polar***e del numero complesso:

$$z = Z_M\left(\cos(\alpha_z) + j\sin(\alpha_z)\right) = Z_M\cos(\alpha_z) + jZ_M\sin(\alpha_z) \qquad \text{(A.16)}$$

Per capire appieno la corrispondenza tra la rappresentazione (A.12), la (A.14) e la (A.16) di un numero complesso, guardiamo la Fig. A.8. In tale figura abbiamo rappresentato il vettore di lunghezza Z_M che corrisponde al modulo del numero complesso e l'angolo α_z, che corrisponde alla fase del numero complesso, e le proiezioni a e b sugli assi.

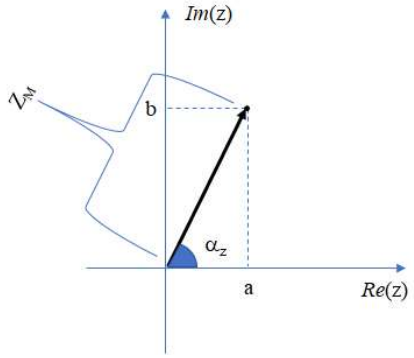


Fig. A.8 – Rappresentazione grafica di un numero complesso in forma cartesiana, polare ed esponenziale.

Dalla Fig. A.8 si evince che:

$$a = Z_M\cos(\alpha_z) \qquad b = Z_M\sin(\alpha_z) \qquad \text{(A.17)}$$

e che il modulo è:

$$Z_M = \sqrt{a^2+b^2} \qquad \text{(A.18)}$$

e che la fase è:

$$\alpha_z = \begin{cases} \text{arctg}\left(\dfrac{b}{a}\right) \text{ se } a \geq 0 \\ \text{arctg}\left(\dfrac{b}{a}\right) + \pi \text{ se } a \leq 0 \end{cases} \tag{A.19}$$

dove è necessario discutere il segno in quanto bisogna tener presente in quale quadrante si trova il fasore.

In conclusione, possiamo scrivere:

$$z = a + jb = Z_M\left(\cos(\alpha_z) + j\sin(\alpha_z)\right) = \sqrt{a^2+b^2}\, e^{j\text{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)} = Z_M e^{j\alpha_z} \tag{A.20}$$

se a>0,

$$z = a + jb = Z_M\left(\cos(\alpha_z) + j\sin(\alpha_z)\right) = \sqrt{a^2+b^2}\, e^{j\left[\text{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)+\pi\right]} = Z_M e^{j\alpha_z} \tag{A.21}$$

se a<0.

In Tabella A.1 abbiamo rappresentato sinteticamente alcuni numeri complessi notevoli espressi nella forma cartesiana ed esponenziale.

Definiamo il ***coniugato di un numero complesso***:

$$z^* = (a+jb)^* = (a - jb); \quad z^* = \left(Z_M e^{j\alpha_z}\right)^* = Z_M e^{-j\alpha_z} \tag{A.22}$$

Il coniugato di un numero complesso gode delle seguenti proprietà:

$$(z_1+z_2)^* = z_1^* + z_2^* \tag{A.23}$$

e

$$(z_1+z_2) = 0 \Rightarrow (z_1+z_2)^* = z_1^* + z_2^* = 0 \tag{A.24}$$

1	1
-1	$e^{j\pi}$
j	$e^{j\frac{\pi}{2}}$
$\pm j$	$e^{\pm j\frac{\pi}{2}}$
$1\pm j$	$\sqrt{2}\,e^{\pm j\frac{\pi}{4}}$
$-1+j$	$\sqrt{2}\,e^{j\frac{3\pi}{4}}$
$-1-j$	$\sqrt{2}\,e^{j\frac{5\pi}{4}}$

Tabella A.1

Infine, definiamo le operazioni elementari con i numeri complessi rappresentati in forma cartesiana.

La somma di due numeri complessi z_1 e z_2:

$$z_1+z_2=(a_1+jb_1)+(a_2+jb_2)=(a_1+a_2)+j(b_1+b_2) \tag{A.25}$$

La differenza di due numeri complessi z_1 e z_2:

$$z_1-z_2=(a_1+jb_1)-(a_2+jb_2)=(a_1-a_2)+j(b_1-b_2) \tag{A.26}$$

Il prodotto di due numeri complessi z_1 e z_2:

$$z_1\times z_2=(a_1+jb_1)\times(a_2+jb_2)=(a_1a_2-b_1b_2)+j(a_1b_2+a_2b_1) \tag{A.27}$$

Il rapporto di due numeri complessi z_1 e z_2:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(a_1+jb_1)}{(a_2+jb_2)}=\frac{(a_1+jb_1)(a_2-jb_2)}{(a_2+jb_2)(a_2-jb_2)}=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)+j(-a_1b_2+a_2b_1)}{a_2^2+b_2^2} \tag{A.28}$$

Definiamo le operazioni elementari con i numeri complessi rappresentati in forma esponenziale.

La somma di due numeri complessi z_1 e z_2:

$$z_1+z_2 = Z_{M1}e^{j\alpha_{z1}} + Z_{M2}e^{j\alpha_{z2}} \tag{A.29}$$

La differenza di due numeri complessi z_1 e z_2:

$$z_1 - z_2 = Z_{M1}e^{j\alpha_{z1}} - Z_{M2}e^{j\alpha_{z2}} \tag{A.30}$$

Il prodotto di due numeri complessi z_1 e z_2:

$$z_1 \times z_2 = Z_{M1}e^{j\alpha_{z1}} \times Z_{M2}e^{j\alpha_{z2}} = \left(Z_{M1} \times Z_{M2}\right)e^{j(\alpha_{z1}+\alpha_{z2})} \tag{A.31}$$

Il rapporto di due numeri complessi z_1 e z_2:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{Z_{M1}e^{j\alpha_{z1}}}{Z_{M2}e^{j\alpha_{z2}}} = \frac{Z_{M1}}{Z_{M2}}e^{j(\alpha_{z1}-\alpha_{z2})} \tag{A.32}$$

Dal punto di vista operativo, guardando le operazioni relative ai numeri complessi è immediato osservare che conviene utilizzare la forma cartesiana del numero complesso per operazioni di somma e sottrazione mentre conviene quella esponenziale per operazioni di prodotto e rapporto.

Appendice 3 – La trasformazione nel dominio dei fasori

In questo paragrafo vedremo come, attraverso varie trasformazioni analitiche, possiamo trasformare una funzione sinusoidale in un fasore del metodo simbolico.

Partiamo da una generica funzione nel dominio del tempo:

$$x(t) = X_M \cos\left(\omega t + \alpha_x\right) \tag{A.33}$$

Allo scopo di "costruire" la trasformazione del metodo simbolico, consideriamo nel piano complesso il punto di coordinate (confronta la Fig. A.2):

$$\left\{X_M \cos(\omega t + \alpha_x), X_M \sin(\omega t + \alpha_x)\right\} \tag{A.34}$$

a cui è associato il numero complesso:

$$X_M \cos(\omega t + \alpha_x) + jX_M \sin(\omega t + \alpha_x) \tag{A.35}$$

La funzione sinusoidale (A.33) è la parte reale del numero complesso (A.35):

$$x(t) = X_M \cos(\omega t + \alpha_x) = Re\left\{X_M \cos(\omega t + \alpha_x) + jX_M \sin(\omega t + \alpha_x)\right\} \tag{A.36}$$

Utilizzando la formula di Eulero (A.15), possiamo scrivere:

$$x(t) = X_M \cos(\omega t + \alpha_x) = Re\left\{X_M e^{j(\omega t + \alpha_x)}\right\} = Re\left\{X_M e^{j\omega t} e^{j\alpha_x}\right\} \tag{A.37}$$

Ogni funzione sinusoidale che compare nel nostro problema, dunque, può essere espressa come parte reale della funzione complessa $X_M e^{j\omega t} e^{j\alpha x}$ come abbiamo scritto nella (A.37). Tale funzione complessa può essere rappresentata nel piano complesso con un vettore rotante intorno all'origine avente lunghezza pari a X_M, fase iniziale pari ad α_x e velocità angolare ω (confronta Fig. A.2) . Osserviamo che, essendo per ipotesi la pulsazione ω uguale per ogni grandezza del circuito (avevamo ipotizzato, infatti, di avere tutti generatori isofrequenziali), queste avranno tutte lo stesso fattore moltiplicativo $e^{j\omega t}$ nella loro rappresentazione. Tutti i vettori ruoteranno solidali tra loro con la stessa velocità angolare intorno all'origine e le grandezze del circuito saranno la proiezione, sull'asse delle ascisse (avendo scelto la parte reale), dei vettori rotanti considerati.

Al fine di operare una trasformazione delle grandezze che variano nel tempo in grandezze indipendenti dal tempo, pur conservando la relazione reciproca tra loro, possiamo scegliere di fare riferimento ad una "fotografia" di tutti i vettori che stanno ruotando all'unisono. In particolare, possiamo scegliere l'istante iniziale e quindi considerare $e^{j\omega t}\Big|_{t=0} = 1$ nella (A.37). Ciò detto appare chiaro che nella trasformazione del metodo

simbolico possiamo omettere la presenza del termine $e^{j\omega t}$ nella rappresentazione (A.37) delle grandezze del circuito. Così facendo, individuiamo una trasformazione che produce grandezze non dipendenti dal tempo. Indicata con il simbolo $\bar{X}$ la grandezza $x(t)$ trasformata nel dominio simbolico, la trasformazione sarà così definita:

$$x(t) = X_M \cos(\omega t + \alpha_x) = Re\left\{X_M e^{j\omega t} e^{j\alpha_x}\right\} \Leftrightarrow \bar{X} = X_M e^{j\alpha_x} \qquad \text{(A.38)}$$

Descritta a parole, la trasformazione (A.38) si può così definire: la grandezza trasformata $\bar{X}$ nel dominio simbolico è uguale alla grandezza complessa $X_M e^{j\alpha_x}$, che moltiplicata per l'esponenziale $e^{j\omega t}$ e consideratane la parte reale, ci restituisce la corrispondente grandezza nel dominio del tempo $x(t)$ come abbiamo mostrato in Fig. A.9.

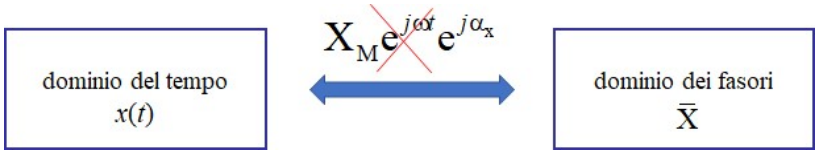


Fig. A.9 – La corrispondenza biunivoca della trasformazione nel dominio dei fasori.

Con la trasformazione nel dominio simbolico o dei fasori abbiamo trovato una ***corrispondenza biunivoca*** tra i due elementi dei due insiemi: $x(t)$ e $\bar{X}$. Tale corrispondenza soddisfa le proprietà di ***unicità*** e di ***linearità***.

Unicità

Ogni elemento generico $x(t)$ definito nel dominio del tempo si trasforma in un unico elemento $\bar{X}$ nel dominio dei fasori. A tale scopo consideriamo due diversi elementi $x_1(t)$ e $x_2(t)$. Se $\bar{X}_1$ e $\bar{X}_2$ sono i rispettivi elementi trasformati, possiamo affermare che:

$$x_1(t) = x_2(t) \Leftrightarrow \bar{X}_1 = \bar{X}_2 \qquad \text{(A.39)}$$

Come diretta conseguenza se $x(t)=0$, sia ha che $\bar{X}=0$.

Linearità

Per mostrare la proprietà di linearità possiamo dimostrare che la combinazione lineare di funzioni sinusoidali nel dominio del tempo si trasforma nella combinazione lineare dei rispettivi elementi trasformati nel dominio dei fasori (confronta la definizione di bipolo lineare nel § 1.4.5 della Lezione 1). In formule:

$$\mathrm{k_1}(\omega)x_1(t)+...+\mathrm{k_n}(\omega)x_\mathrm{n}(t)=0\Leftrightarrow\mathrm{k_1}(\omega)\bar{\mathrm{X}}_1+...+\mathrm{k_n}(\omega)\bar{\mathrm{X}}_\mathrm{n}=0 \qquad \text{(A.40)}$$

dove $k_i=k_i(\omega)$ in generale dipende da ω in quanto tale coefficiente potrebbe essere quello proveniente da un termine derivato. Per meglio comprendere quanto abbiamo appena affermato è necessario aver studiato il § 1.2 ed in particolare la (8.17).

Per dimostrare la (A.40), partiamo dal dominio del tempo:

$$\mathrm{k_1}(\omega)\mathrm{X_{M1}}\cos(\omega t+\alpha_1)+...+\mathrm{k_n}(\omega)\mathrm{X_{Mn}}\cos(\omega t+\alpha_\mathrm{n})=0 \quad \forall t \qquad \text{(A.41)}$$

Ora, essendo la (A.41) nulla per ogni t, possiamo traslare il tempo di $\pi/2\omega$, e ottenere la seguente espressione con i seni:

$$\mathrm{k_1}(\omega)\mathrm{X_{M1}}\sin(\omega t+\alpha_1)+...+\mathrm{k}_n(\omega)\mathrm{X_{Mn}}\sin(\omega t+\alpha_\mathrm{n})=0 \qquad \text{(A.42)}$$

essendo $\cos\left(\omega\left(t+\dfrac{\pi}{2\omega}\right)+\alpha_\mathrm{i}\right)=\cos\left(\omega t+\alpha_\mathrm{i}+\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin(\omega t+\alpha_\mathrm{i})$.

A questo punto sommiamo la (A.41) alla (A.42) moltiplicata per *j*. Si ha:

$$\begin{aligned}&\mathrm{k_1}(\omega)\mathrm{X_{M1}}\left(\cos(\omega t+\alpha_1)+j\sin(\omega t+\alpha_1)\right)+... \\ &+\mathrm{k_n}(\omega)\mathrm{X_{Mn}}\left(\cos(\omega t+\alpha_\mathrm{n})+j\sin(\omega t+\alpha_\mathrm{n})\right)=0\end{aligned} \qquad \text{(A.43)}$$

Grazie alla formula di Eulero (A.15), la (A.43) può anche essere riscritta come:

$$\left[\mathrm{k_1}(\omega)\mathrm{X_{M1}}e^{j\alpha_1}+\mathrm{k_2}(\omega)\mathrm{X_{M2}}e^{j\alpha_2}+...+\mathrm{k}_n(\omega)\mathrm{X_{Mn}}e^{j\alpha_n}\right]e^{j\omega t}=0 \qquad \text{(A.44)}$$

che, dovendo essere nulla per ogni *t*, può essere riscritta ponendo t=0:

$$k_1(\omega)X_{M1}e^{j\alpha_1} + k_2(\omega)X_{M2}e^{j\alpha_2} + \ldots + k_n(\omega)X_{Mn}e^{j\alpha_n} = 0 \qquad \text{(A.45)}$$

corrispondente alla combinazione lineare dei fasori:

$$k_1(\omega)\bar{X}_1 + k_2(\omega)\bar{X}_2 + \ldots + k_n(\omega)\bar{X}_n = 0 \qquad \text{(A.46)}$$

che è quanto volevamo dimostrare.

Indice delle figure

Fig. 8.1 – Corrispondenza biunivoca istaurata dal metodo simbolico. 5

Fig. 8.2 – La trasformazione nel dominio dei fasori. 8

Fig. 8.3 – La trasformazione dal dominio del tempo al dominio dei fasori e l'anti-trasformata. 12

Fig. 8.4 – Rappresentazione nel diagramma fasoriale della tensione e corrente di un generico bipolo. 22

Fig. 8.5 – Diagramma fasoriale del resistore. 23

Fig. 8.6 – Diagramma fasoriale dell'induttore. 23

Fig. 8.7 – Diagramma fasoriale del condensatore. 23

Fig. 8.8 – Diagramma fasoriale del bipolo assegnato nell'esercizio. 24

Fig. 8.9 – Esercizio per il calcolo dell'impedenza equivalente. 27

Fig. 8.10 – Esercizio con partitore di corrente. 29

Fig. 8.11 – Esercizio con formula di Millman. 30

Fig. 8.12 – Sotto-circuito di cui calcolare il generatore equivalente. 33

Fig. 8.13 – Circuito in regime sinusoidale. 35

Fig. 8.14 – Circuito di Fig. 8.13. 36

Fig. 8.15 – Sovrapposizione degli effetti in regime sinusoidale. 41

Fig. 8.16 – Circuito RLC serie. 43

Fig. 8.17 – Andamento del modulo del fasore della corrente (8.98) in funzione della pulsazione ω. 46

Fig. 8.18 – Andamento della fase del fasore della corrente (8.99) in funzione della pulsazione ω. 46

Fig. 8.19 – Curve universali di risonanza per il modulo (8.108). 49

Fig. 8.20 – Curve universali di risonanza per la fase (8.109) 49

Fig. 8.21 – Il circuito RLC parallelo. 50

Fig. 8.22 – Andamento del modulo del fasore della tensione (8.117) in funzione della pulsazione ω. 53

Fig. 8.23 – Andamento della fase del fasore della tensione (8.118) in funzione della pulsazione ω. 53

Fig. 8.24 – Reattanze in risonanza serie. 56

Fig. 8.25 – Reattanze in risonanza parallelo. 57

Fig. 8.26 – Circuito con elementi in risonanza serie. 57

Fig. 8.27 – Circuito equivalente a quello di Fig. 8.26. 59

Fig. 8.28 – Circuito equivalente a quello di Fig. 8.27 quando si trova nella condizione di risonanza. 59

Fig. 8.29 – Circuito con elementi in risonanza parallelo. 60

Fig. 8.30 – Circuito equivalente al circuito di Fig. 8.29 quando si trova in risonanza. .. 61

Fig. 8.31 – Il circuito come sistema ingresso-uscita. 62

Fig. 8.32 – Il circuito come sistema ingresso-uscita nel dominio dei fasori. 63

Fig. 8.33 – Possibile grafico della risposta in ampiezza (il modulo della (8.143)) della funzione di rete. 66

Fig. 8.34 – Spettro in frequenza dell'ampiezza del segnale d'ingresso. 67

Fig. 8.35 – Spettro in frequenza dell'ampiezza del segnale in uscita. 68

Fig. 8.36 – Risposta in ampiezza di un filtro passa-banda. 69

Fig. 8.37 – Risposta in ampiezza e spettro di ampiezza del segnale d'ingresso in una stazione radio ricevente. 72

Fig. 8.38 – Risposta in ampiezza di un filtro passa–basso. 73

Fig. 8.39 – Risposta in ampiezza di un filtro passa-alto. 74

Domande

Teoria

Il metodo simbolico e fasori

8.1 Che significa che due generatori erogano due tensioni sinusoidali iso-frequenziali?

8.2 Riguardo i circuiti a regime sinusoidale, che si intende per metodo simbolico?

8.3 Cosa si intende per dominio simbolico?

8.4 Cosa si intende per dominio dei fasori?

8.5 Che differenza c'è tra dominio simbolico e dominio dei fasori?

8.6 Come si chiama la corrispondenza tra il dominio del tempo e il dominio simbolico nei circuiti a regime sinusoidale?

8.7 Quali sono le proprietà della corrispondenza biunivoca della trasformata nel dominio simbolico?

8.8 Come si trasformano le leggi di Kirchhoff nel dominio simbolico?

8.9 Perchè si utilizza la trasformazione nel dominio dei fasori?

8.10 Quali delle seguenti affermazioni definisce in modo univoco che un circuito è in regime sinusoidale?

8.11 Cosa significa che la funzione $\cos(\omega t)$ è una funzione periodica di periodo T?

8.12 Dato il numero complesso $z=a+jb$, con $a<0$, come si rappresenta in forma esponenziale?

8.13 Dato il numero complesso $z=a+jb$, con $a>0$, come si rappresenta in forma esponenziale?

8.14 Dato il numero complesso $z = Z_M e^{j\alpha_z}$ come si rappresenta in forma cartesiana?

8.15 Che relazione esiste tra pulsazione ω e frequenza f di una funzione sinusoidale?

8.16 Quali sono i parametri che individuano ogni grandezza sinusoidale presente in un circuito a regime sinusoidale?

8.17 Quanto vale lo sfasamento tra le due funzioni sinusoidali $x(t)=X_M\text{sen}(\omega t+ \pi/3)$ e $y(t) = Y_M\cos(\omega t)$?

8.18 Cosa si intende per fase iniziale della funzione sinusoidale $X_M\cos(\omega t+\alpha_x)$?

8.19 Cosa si intende per valore efficace della funzione sinusoidale $X_M\cos(\omega t+\alpha_x)$?

8.20 Cosa si intende per ampiezza della funzione sinusoidale $X_M\cos(\omega t+\alpha_x)$?

8.21 Cosa si intende per frequenza della funzione sinusoidale $X_M\cos(\omega t+\alpha_x)$?

8.22 Cosa si intende per periodo temporale della funzione sinusoidale $X_M\cos(\omega t+\alpha_x)$?

8.23 A quanto è uguale il valor medio di una funzione sinusoidale?

8.24 Che relazione esiste tra valore efficace X_{eff} e valore massimo X_M di una sinusoide?

8.25 Che significa che un circuito è in regime sinusoidale?

8.26 Come possiamo esprime $\cos(\omega t+\alpha)$ in termine della funzione sen(.)?

8.27 A quanto è uguale il periodo temporale della funzione $\cos(150t+\pi/3)$?

8.28 Quali sono i parametri che individuano una funzione sinusoidale?

8.29 Che relazione esiste tra valore efficace X_{ef} e l'ampiezza X_M di una sinusoide?

8.30 Che differenza c'è tra un fasore e un'impedenza?

8.31 La seguente condizione NON è una condizione da verificare per la trasformazione nel dominio dei fasori:

8.32 La trasformazione nel dominio dei fasori NON serve a:

8.33 Da cosa dipende in che modo anti-trasformare un fasore nel dominio del tempo?

8.34 Che significa che in un circuito a regime sinusoidale esiste un isomorfismo nelle funzioni che rappresentano tutte le grandezze presenti nel circuito?

La trasformazione della derivata

8.35 Trovare l'espressione della funzione $y(t)=\mathrm{d}(x(t)=X_M\cos(\omega t+\alpha_x))/\mathrm{d}t$.

8.36 La derivata $y(t)=\mathrm{d}x(t)/\mathrm{d}t$ con $x(t)=X_M\cos(\omega t+\alpha_x)$ come può trasformarsi nel dominio dei fasori?

8.37 A cosa corrisponde nel dominio simbolico l'operatore di derivata d/dt?

8.38 Che significa che la trasformazione nel dominio simbolico di un circuito a regime sinusoidale "algebrizza" le derivate?

L'impedenza e l'ammettenza

8.39 Data l'impedenza di un bipolo $\dot{Z}=R+jX$ si ha che l'ammettenza $\dot{Y}$ dello stesso bipolo è pari a:

8.40 L'ammettenza (l'impedenza) di un induttore L (condensatore C) che si trova in un circuito a regime sinusoidale di pulsazione ω è:

8.41 Data l'impedenza di un bipolo $\dot{Z}=R+jX$, si ha che la conduttanza dello stesso bipolo è pari a:

8.42 Data l'impedenza di un bipolo $\dot{Z}=R+jX$, si ha che la suscettanza dello stesso bipolo è pari a:

8.43 Come si misura la parte reale dell'impedenza $\dot{z}$ di un bipolo in regime sinusoidale?

8.44 Come si misura la parte reale dell'impedenza $\dot{z}$ di un bipolo in regime sinusoidale?

8.45 Quale è la reattanza (resistenza, conduttanza, suscettanza) del resistore (condensatore, induttore)?

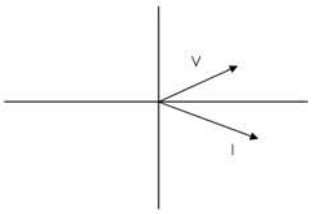
8.46 Che segno ha la reattanza di un condensatore (induttore) se si è fatta la convenzione dell'utilizzatore sul bipolo?

I diagrammi fasoriali

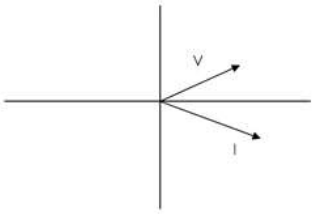
8.47 In un diagramma fasoriale come sono, tra loro, i fasori tensione e corrente di un condensatore (resistore, induttore)?

8.48 A cosa serve un diagramma fasoriale di un circuito in regime sinusoidale?

8.49 Il fasore della tensione è in anticipo o in ritardo di fase rispetto alla corrente nel seguente diagramma fasoriale?



8.50 Dato un bipolo passivo in regime sinusoidale avente tensione e corrente disegnati nel seguente diagramma fasoriale, che tipo di bipolo potrebbe essere?



L'impedenza e l'ammettenza equivalente

8.51 Quale delle seguenti espressioni è quella corretta, nel dominio simbolico, per un'impedenza (ammettenza) equivalente parallelo tra un condensatore C (resistore

R) e un induttore L (resistore R) presenti in un circuito a regime sinusoidale di pulsazione ω?

8.52 Quale delle seguenti espressioni è quella corretta, nel dominio simbolico, per un'impedenza (ammettenza) equivalente serie tra un condensatore C (resistore R) e un induttore L (resistore R) presenti in un circuito a regime sinusoidale di pulsazione ω?

8.53 È possibile, in un circuito a regime sinusoidale nel dominio simbolico, utilizzare la trasformazione stella-triangolo?

8.54 È possibile utilizzare il bipolo equivalente serie o parallelo tra due bipoli in un circuito a regime sinusoidale senza usare la trasformazione nel dominio simbolico?

I partitori di tensione e di corrente

8.55 È possibile, in un circuito a regime sinusoidale trasformato nel dominio simbolico, effettuare un partitore di tensione (corrente) tra un condensatore (resistore) e un induttore (resistore)?

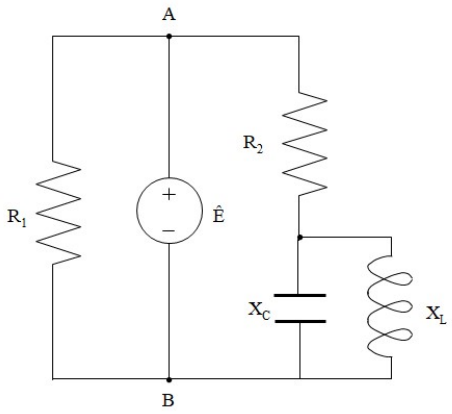
8.56 È possibile, in un circuito a regime sinusoidale nel dominio del tempo, effettuare un partitore di tensione tra un condensatore (resistore) e un induttore (resistore)?

La formula di Millman

8.57 È possibile utilizzare la formula di Millman in un circuito a regime sinusoidale nel dominio del tempo?

8.58 È possibile utilizzare la formula di Millman in un circuito a regime sinusoidale nel dominio dei fasori?

8.59 Quali delle seguenti formule è quella corretta di Millman per il circuito di figura?



Il circuito equivalente secondo Thevenin e Norton

8.60 È possibile utilizzare il teorema del generatore equivalente per un circuito a regime sinusoidale nel dominio del tempo?

8.61 È possibile utilizzare il teorema del generatore equivalente per un circuito a regime sinusoidale nel dominio dei fasori?

8.62 Cosa è necessario calcolare in un sotto–circuito a regime sinusoidale studiato nel dominio simbolico, quando vogliamo utilizzare il circuito equivalente secondo Thevenin?

8.63 Cosa è necessario calcolare in un sotto–circuito a regime sinusoidale studiato nel dominio simbolico, quando vogliamo utilizzare il circuito equivalente secondo Norton?

Il principio di sovrapposizione degli effetti nei circuiti a regime sinusoidale

8.64 In un circuito lineare, con bipoli passivi tempo-invarianti, avente due generatori non isofrequenziali, posso utilizzare il metodo simbolico per determinare le grandezze di regime?

I circuiti risonanti

8.65 Quale delle seguenti è una corretta definizione di circuito in risonanza?

8.66 Quanti elementi reattivi ci devono essere in un circuito dinamici a regime sinusoidale per osservare una condizione di risonanza?

8.67 È possibile osservare un fenomeno di risonanza in un circuito dinamico in regime sinusoidale con due condensatori (induttori) e resistori?

8.68 Quale delle seguenti espressioni NON può essere quella della pulsazione di risonanza:

8.69 Quale delle seguenti espressioni rappresenta la pulsazione di risonanza di un circuito RLC serie o parallelo?

8.70 In un circuito dinamico del II ordine a regime sinusoidale in risonanza con un unico generatore, quanto vale la parte immaginaria dell'impedenza (ammettenza) equivalente vista dal generatore?

8.71 È possibile osservare il fenomeno della risonanza in un circuito dinamico del II ordine del tipo LC a regime sinusoidale con più generatori isofrequenziali?

8.72 Quanto vale la pulsazione di risonanza nei circuiti RLC serie e parallelo a regime sinusoidale?

Il circuito RLC serie in risonanza

8.73 Che valore assume il modulo del fasore della corrente dell'unica maglia di un circuito RLC serie a regime sinusoidale quando siamo in risonanza?

8.74 Che valore assume la fase del fasore della corrente dell'unica maglia di un circuito RLC serie a regime sinusoidale quando siamo in risonanza?

8.75 Che valore assume il modulo del fasore della corrente dell'unica maglia di un circuito RLC serie a regime sinusoidale al tendere della pulsazione a zero (all'infinito)?

8.76 Che valore assume la fase del fasore della corrente dell'unica maglia di un circuito RLC serie a regime sinusoidale al tendere della pulsazione a zero (all'infinito)?

8.77 Quale tra le seguenti è la corretta espressione del modulo I_M del fasore della corrente dell'unica maglia di un circuito RLC serie a regime sinusoidale in funzione della pulsazione ω?

8.78 Quale tra le seguenti è la corretta espressione della fase φ_i del fasore della corrente dell'unica maglia di un circuito RLC serie a regime sinusoidale in funzione della pulsazione ω?

8.79 In un circuito RLC serie in risonanza che relazione esiste tra il fasore della tensione sul condensatore e quello sull'induttore?

8.80 Quale è l'espressione corretta del fattore di qualità Q di un circuito RLC serie in risonanza?

8.81 Cosa sono le curve universali di risonanza di un circuito RLC serie?

8.82 Come dipendono le curve universali di risonanza dal fattore di qualità Q di un circuito risonante RLC serie?

Il circuito RLC parallelo in risonanza

8.83 Che valore assume il modulo del fasore della tensione del parallelo dei bipoli di un circuito RLC parallelo a regime sinusoidale quando siamo in risonanza?

8.84 Che valore assume la fase del fasore della tensione del parallelo dei bipoli di un circuito RLC parallelo a regime sinusoidale quando siamo in risonanza?

8.85 Che valore assume il modulo del fasore della tensione del parallelo dei bipoli di un circuito RLC parallelo a regime sinusoidale al tendere della pulsazione a zero (all'infinito)?

8.86 Che valore assume la fase del fasore della tensione del parallelo dei bipoli di un circuito RLC parallelo a regime sinusoidale al tendere della pulsazione a zero (all'infinito)?

8.87 Quale tra le seguenti è la corretta espressione del modulo V_M del fasore della tensione del parallelo dei bipoli di un circuito RLC parallelo a regime sinusoidale in funzione della pulsazione ω?

8.88 Quale tra le seguenti è la corretta espressione della fase φ_v del fasore della tensione dell'unica maglia di un circuito RLC serie a regime sinusoidale in funzione della pulsazione ω?

8.89 In un circuito RLC parallelo in risonanza che relazione esiste tra il fasore della corrente sul condensatore e quello sull'induttore?

8.90 Quale è l'espressione corretta del fattore di qualità Q di un circuito RLC parallelo in risonanza?

8.91 Cosa sono le curve universali di risonanza di un circuito RLC parallelo?

8.92 Come dipendono le curve universali di risonanza dal fattore di qualità Q di un circuito risonante RLC parallelo?

I circuiti con elementi in risonanza

8.93 Quanto vale la tensione di una serie (parallelo) di un condensatore e un induttore in risonanza?

8.94 Quale è la impedenza equivalente di una serie (parallelo) di un condensatore e induttore in risonanza?

8.95 Quanto vale la tensione (corrente) sul condensatore (induttore) della serie (parallelo) dei due elementi reattivi presenti in un circuito a regime sinusoidale in risonanza?

8.96 In un circuito dinamico del II ordine a regime sinusoidale in risonanza con un unico generatore, quanto vale la parte immaginaria dell'impedenza (ammettenza) equivalente vista dal generatore?

8.97 Come è possibile ricondurre un circuito dinamico del II ordine a regime sinusoidale con

Esercizi

Quando indicato dalla presenza del simbolo @ si tratta di esercizi risolti presi dal sito:

https://autocircuits.org/autocir_home.html. È possibile generare altri esercizi risolti utilizzando il sito che prevede varie categorie di esercizi. Quando trovate il simbolo @, vuol dire che è possibile utilizzare il sito per la tipologia di esercizi che si stanno risolvendo.

Calcolo di un fasore, di un'impedenza e di un'ammettenza

8.98 Esprimere il fasore $\bar{X}=-2+j2$ in forma esponenziale.

8.99 Esprimere il fasore $\bar{X}=\frac{1}{-2+j2}$ in forma esponenziale.

8.100 Esprimere il fasore $\bar{X}=\frac{1}{-2+j2}$ in forma cartesiana.

8.101 Esprimere il fasore $\bar{X}=2e^{-j\frac{\pi}{4}}$ in forma cartesiana.

8.102 Dato il fasore $\bar{X}=-3-j2$ calcolare il fasore in forma esponenziale.

8.103 Esprimere il fasore $\bar{X}=2e^{j3.4}$ in forma cartesiana.

8.104 Esprimere il fasore $\bar{X}=3e^{-j1.4}$ in forma cartesiana.

8.105 Data l'impedenza $\dot{Z}=2+j2$ determinare lo sfasamento φ tra il fasore della tensione e il fasore della corrente del bipolo.

8.106 Data l'ammettenza $\dot{Y}=-1+j2$ determinare il rapporto tra i moduli della tensione e della corrente V_M/I_M.

8.107 Dato il fasore $\bar{X}=-2$ della funzione $x(t)=8\text{sen}(100t+\pi/2)$, e dato il fasore $\hat{Y}=-2+j$ determinare la funzione $y(t)$ anti-trasformando il fasore $\hat{Y}$.

8.108 Data la grandezza $x(t)=8\text{sen}(100t+\pi/2)$ come potremmo trasformarla in fasore?

8.109 A quanto è uguale il periodo temporale T della funzione sinusoidale $\text{sen}(150t+\pi/3)$?

8.110 Data la grandezza $x(t)=8\text{sen}(100t+\pi/2)$, quali delle seguenti quantità può essere considerata il fasore associato a $x(t)$?

8.111 Se un bipolo passivo in regime sinusoidale ha un'impedenza pari a $\dot{Z}=-1+j2$ quanto vale l'angolo di ritardo della corrente rispetto alla tensione?

8.112 Se un bipolo passivo in regime sinusoidale ha un'ammettenza pari a $\dot{Y}=1+j3$ quanto vale l'angolo di ritardo della corrente rispetto alla tensione?

8.113 Data l'impedenza $\dot{Z}=1+j2$ calcolare l'ammettenza $\dot{Y}$.

8.114 Data l'impedenza $\dot{Y}=-3+j2$ calcolare l'ammettenza $\dot{Y}$.

8.115 Dati fasori tensione e corrente di un bipolo $\overline{V}=2-j2$ e $\overline{I}=-j2$ calcolare l'angolo di ritardo della corrente rispetto alla tensione.

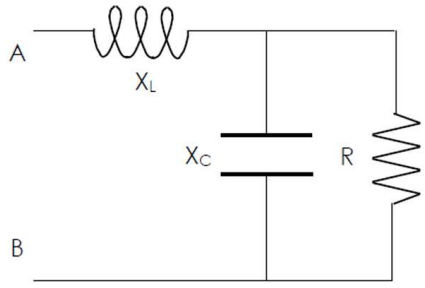
8.116 Dati fasori tensione e corrente di un bipolo $\overline{V}=1-j2$ e $\overline{I}=4-j2$ calcolare l'impedenza del bipolo (convenzione del generatore).

Impedenza e ammettenza equivalente

8.117 Dato il seguente circuito calcolare l'ammettenza equivalente $\dot{Y}_{eq}$ vista dai morsetti A–B:

($R=1\ \Omega$, $X_C=-2\ \Omega$, $X_L=2\ \Omega$)

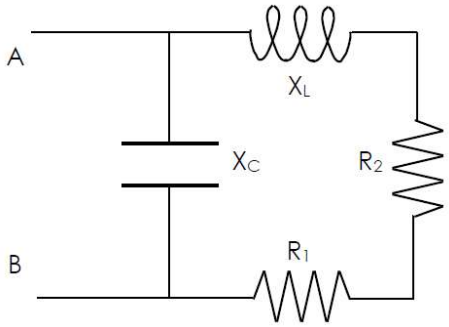
$$\dot{Y}_{eq}=0.25-j0.5$$



8.118 Dato il seguente circuito calcolare l'impedenza equivalente $\dot{Z}_{eq}$ vista dai morsetti A–B:

($R_1=5\ \Omega$, $R_2=5\ \Omega$, $X_C=-10\ \Omega$, $X_L=10\ \Omega$)

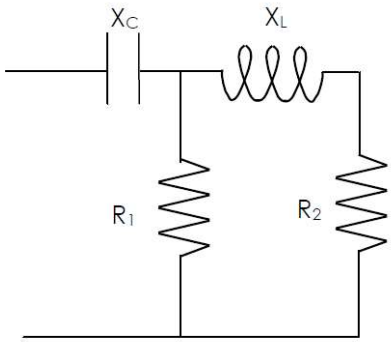
$$\dot{Z}_{eq}=10-j10$$



8.119 Dato il seguente circuito calcolare l'impedenza equivalente $\dot{Z}_{eq}$ vista dai morsetti A–B:

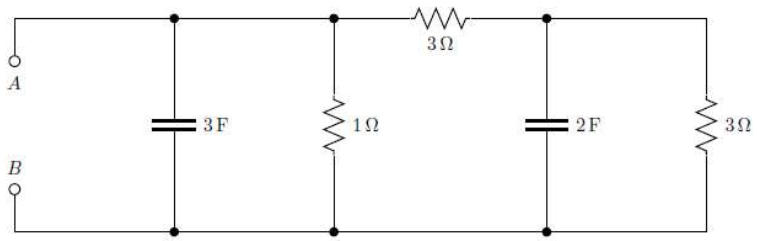
(R_1=1 Ω, R_2=1 Ω, X_C= –1 Ω, X_L=1 Ω)

$$\dot{Z}_{eq} = \frac{1}{5}(3 - j4)$$



8.120 @ Trovare l'impedenza equivalente $\dot{Z}_{eq}$ alla frequenza di 2Hz tra i terminali A–B.

$$\dot{Z}_{eq} = 0.937 - j26.49 (\text{m}\Omega)$$

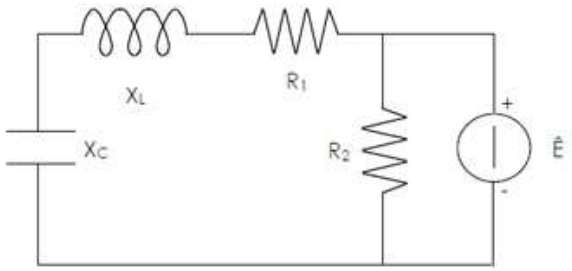


Soluzione del dominio del tempo di un circuito in regime sinusoidale

8.121 In riferimento al circuito a regime sinusoidale di figura, calcolare la corrente $i(t)$ nell'induttore X_L

($e(t)=10\cos(100t)$; $R_1=5\ \Omega$, $R_2=5\ \Omega$, $X_C=-10\ \Omega$; $X_L=10\ \Omega$)

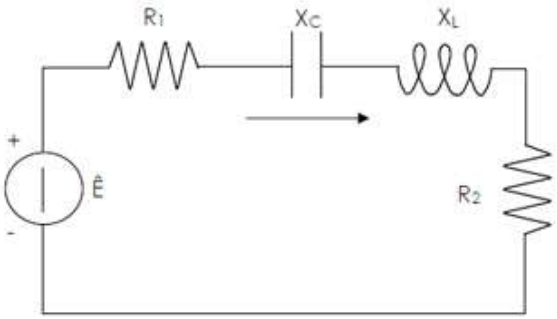
$i(t) = 2\cos(100t)$



8.122 In riferimento al circuito in regime sinusoidale di figura, calcolare il valore efficace della tensione V_{Ceff} ai capi condensatore X_C.

($e(t)=10\cos(100t)$; $R_1=5\ \Omega$, $R_2=5\ \Omega$; $X_C=-10\ \Omega$; $X_L=10\ \Omega$)

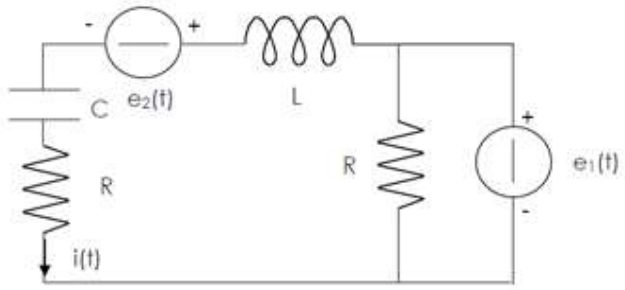
$V_{Ceff} = 10$ V



8.123 In riferimento al circuito a regime sinusoidale di figura, calcolare la corrente $i(t)$ nel condensatore X_C.

($e_1(t)=10\text{sen}(100t)$; $e_2(t)=-15\text{sen}(100t)$; $R=5\ \Omega$, $X_C=-10\ \Omega$; $X_L=10\ \Omega$)

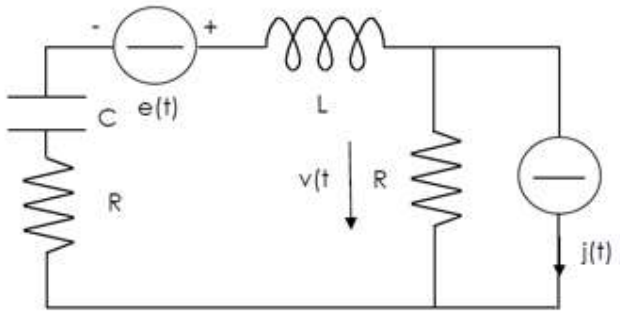
$i(t) = 5\text{sen}(100t)$ A



8.124 In riferimento al circuito a regime sinusoidale di figura, calcolare la tensione $v(t)$ ai capi del resistore R come indicato in figura

($e(t)=10\cos(100t)$; $j(t)=-10\cos(100t)$; $R=5\ \Omega$, $X_C=-10\ \Omega$; $X_L=10\ \Omega$)

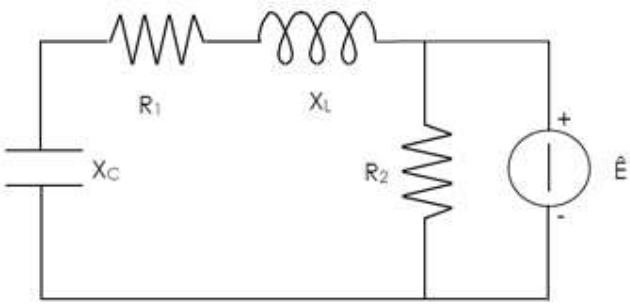
$v(t) = -30\cos(100t)$



8.125 In riferimento al circuito a regime sinusoidale di figura, calcolare la tensione $v(t)$ dell'induttore X_L

($e(t)=10\text{sen}(100t)$; $R_1=5\ \Omega$, $R_2=5\ \Omega$, $X_C=-10\ \Omega$; $X_L=10\ \Omega$)

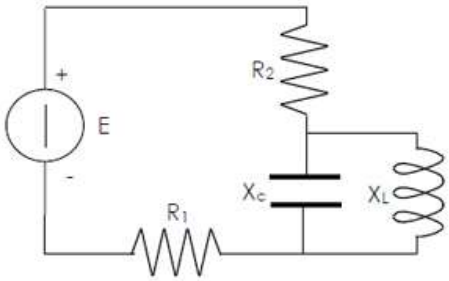
$v(t) = 20\text{sen}(100t+\pi/2)$



8.126 Dato il seguente circuito in regime sinusoidale calcolare il valore efficace della tensione V_{2eff} ai capi della resistenza R_2

($\bar{E}$ =30, R_1=5 Ω, R_2=5 Ω; X_C=−10 Ω; X_L=10 Ω) (per la trasformazione nel dominio dei fasori si è usato il valore efficace)

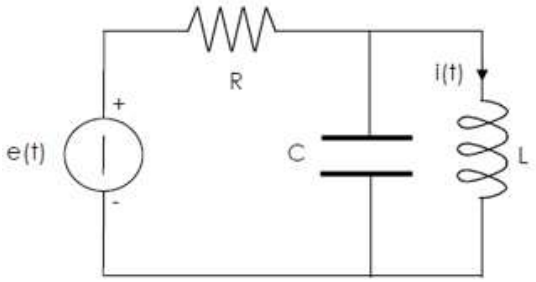
V_{2eff} = 0 V



8.127 In riferimento al circuito di figura, calcolare la corrente $i(t)$ nell'induttore X_L

(e(t)=10sen(100t); R=5 Ω, X_C= −10 Ω; X_L=10 Ω)

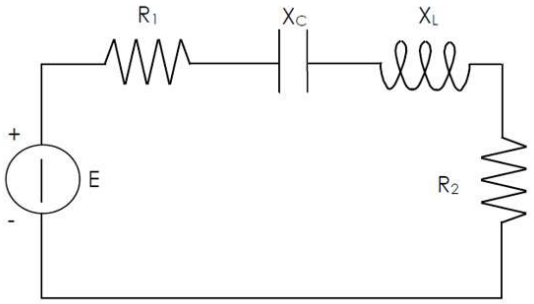
$i(t) = -\cos(100t)$



8.128 In riferimento al circuito in regime sinusoidale di figura, calcolare la tensione sull'induttore X_L:

($\bar{E}$=3; R_1=1 Ω, R_2=2 Ω; X_C= −5 Ω; X_L=5 Ω)

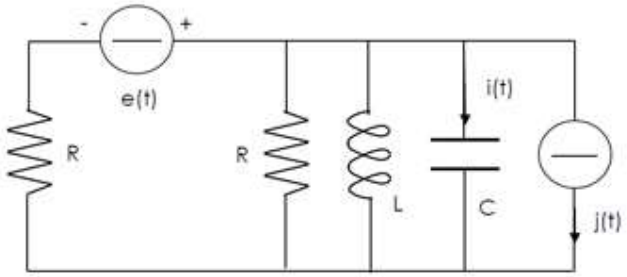
$\bar{V} = j5$



8.129 In riferimento al circuito a regime sinusoidale di figura, calcolare la corrente $i(t)$ nel condensatore C come indicato in figura.

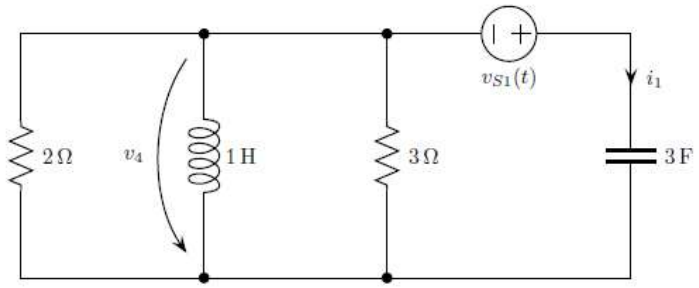
(e(t)=150cos(100t); j(t)= –10cos(100t); R=5 Ω, X_C= –10 Ω; X_L=10 Ω)

$i(t) = 10\cos(100t + \pi/2)$



8.130 @ In riferimento al circuito a regime sinusoidale di figura, calcolare la corrente $i(t)$ nel condensatore C come indicato in figura.

($v_{s1}(t)$=3cos(100t+165°)

$i_1(t) = 5.407\cos(100t + 137°)$

$v_4(t) = 4.154\cos(100t - 172°)$