# Lezione 9

# La potenza in regime sinusoidale

Lezioni di **Elettrotecnica** per studenti di **Ingegneria Gestionale**

ideate e scritte da

**Lorenza Corti**

con il contributo di **Vincenzo Paolo Loschiavo**

# Sommario

1 **La potenza in regime sinusoidale** ..... 3

1.1 La potenza definita nel dominio del tempo ..... 3

1.2 La potenza definita nel dominio simbolico ..... 6

1.2.1 *La potenza complessa nei bipoli passivi e attivi* ..... 9

1.2.2 *La potenza e la sovrapposizione degli effetti* ..... 11

2 **Il teorema di Tellegen in regime sinusoidale** ..... 14

3 **Esercizi** ..... 18

3.1 Il calcolo della potenza di un bipolo ..... 18

3.2 Il calcolo della potenza assorbita da un bipolo in un circuito ..... 19

3.3 La verifica della conservazione della potenza in un circuito ..... 22

4 **I circuiti in regime sinusoidale con wattmetro** ..... 25

4.1 Esercizi ..... 26

4.1.1 *Calcolo della potenza attiva virtuale misurata dal wattmetro* ..... 26

4.1.2 *Calcolo della potenza attiva virtuale misurata dal wattmetro in un circuito in risonanza* ..... 28

4.1.3 *Calcolo della potenza attiva misurata dal wattmetro* ..... 30

**Indice delle figure** ..... 33

**Domande** ..... 34

Teoria ..... 34

Esercizi ..... 38

# 1 La potenza in regime sinusoidale

Un importante capitolo nello studio dei circuiti in regime sinusoidale è riservato alla potenza. Gli aspetti energetici presenti nei circuiti giocano un ruolo molto importante soprattutto qualora si tratti di sistemi di produzione, trasporto e distribuzione dell'energia elettrica (vedi Lezione 10).

Come vedremo nel § 1.1, e come è possibile osservare nella A.9 dell'Appendice 1 della Lezione 8 e nel grafico ad essa relativa, la potenza istantanea consiste in due termini: uno costante e uno sinusoidale di pulsazione doppia rispetto a quella delle grandezze del circuito.

Essendo il prodotto di due grandezze, la tensione e la corrente, che trasformiamo in fasori, la potenza non è una grandezza trasformabile nel dominio simbolico. Pertanto, data l'importanza dell'aspetto energetico nei circuiti, sarà necessario definire una potenza direttamente nel dominio simbolico come vedremo nel § 1.2.

## 1.1 La potenza definita nel dominio del tempo

Supponiamo di avere un bipolo con tensione $v(t) = \mathrm{V_M}\cos(\omega t + \alpha_v)$ e corrente $i(t) = \mathrm{I_M}\cos(\omega t + \alpha_i)$. La potenza (assorbita o erogata) è data, così come definito dalla 1.6 della Lezione 1, dalla relazione:

$$p(t) = \mathrm{V_M}\cos(\omega t + \alpha_v)\,\mathrm{I_M}\cos(\omega t + \alpha_i) \qquad (9.1)$$

La potenza (9.1) rappresenta la ***potenza istantanea***, ***erogata*** se sul bipolo avremo fatto la convenzione del generatore, altrimenti la potenza sarà detta ***assorbita***. Ricordando la formula trigonometrica: $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right]$, otteniamo la formula:

$$p(t) = \frac{1}{2}\mathrm{V_M I_M}\cos\varphi + \frac{1}{2}\mathrm{V_M I_M}\cos\left(2\omega t + (\alpha_v + \alpha_i)\right) \qquad (9.2)$$

dove $\varphi = (\alpha_v - \alpha_i)$ è detto ***sfasamento*** e $\cos\varphi$ è il detto ***fattore di potenza***.

Utilizzando i valori efficaci introdotti nella (A.4) dell'Appendice 1 della Lezione 8, possiamo riscrivere la (9.2):

$$p(t) = V_{eff} I_{eff} \cos\varphi + V_{eff} I_{eff} \cos\left(2\omega t + (\alpha_v + \alpha_i)\right) \qquad (9.3)$$

Vogliamo indagare cosa rappresentano i due termini al secondo membro della (9.2) o della (9.3). Osserviamo che, da un punto di vista matematico, il primo termine è costante, mentre il secondo termine è una funzione sinusoidale di pulsazione doppia rispetto alla pulsazione delle grandezze del circuito. Il termine costante dipende dal fattore di potenza. Entrambi i termini dipendono dal coefficiente $\frac{1}{2} V_M I_M$ oppure da $V_{eff} I_{eff}$.

Vogliamo ora dare una interpretazione fisica ai due termini.

Ebbene, il primo termine rappresenta la ***potenza media*** della potenza istantanea e la indicheremo con il simbolo P. Il secondo termine dipendente dal tempo viene denominato ***potenza fluttuante*** e rappresenta un termine sinusoidale di pulsazione $2\omega$ che quindi oscilla il doppio delle volte nel periodo rispetto a tutte le altre funzioni sinusoidali. Il secondo termine tiene conto del fatto che le grandezze sono periodiche nel tempo e quindi il valore della potenza (assorbita o erogata) da un bipolo presente nel circuito varia periodicamente nel tempo. In Fig. 9.1 abbiamo rappresentato una funzione del tipo (9.2) o (9.3), dove è visibile la presenza di un valore medio diverso da zero sommato ad un andamento sinusoidale. Si veda anche la Fig. A.3 della Lezione 8.

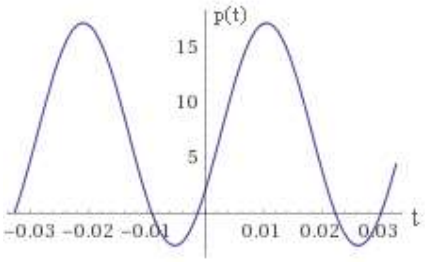



*Fig. 9.1 – Un grafico di esempio della funzione p(t) della (9.2).*

Occupiamoci della potenza media. Consideriamo il valore medio della potenza istantanea p($t$) della (9.2) o della (9.3), che chiamiamo P, in un certo intervallo temporale multiplo del periodo T prima definito:

$$\mathrm{P} = \langle \mathrm{p}(t) \rangle = \frac{1}{\mathrm{nT}} \int_0^{\mathrm{nT}} p(t)\,dt = \frac{1}{2} \mathrm{V_M I_M} \cos\varphi = \mathrm{V_{eff} I_{eff}} \cos\varphi \qquad (9.4)$$

$\mathrm{T} = \dfrac{2\pi}{\omega}$ è il periodo temporale delle funzioni $v(t)$ e $i(t)$. Si osservi come la potenza media P dipende dalle ampiezze $\mathrm{V_M}$ e $\mathrm{I_M}$ oppure dai valori efficaci. Nei due casi abbiamo delle espressioni che differiscono per la costante ½ a seconda se utilizziamo il valore massimo o il valore efficace delle sinusoidi. Inoltre, la potenza media P dipende dal fattore di potenza $\cos\varphi$ ed essendo il coseno una funzione pari, si ha che la potenza media dipende solo dal valore assoluto di $|\varphi|$.

La potenza fluttuante che compare nella (9.2) o nella (9.3) non contribuisce al valore della potenza in quanto il suo periodo è pari alla metà del periodo temporale su cui valutiamo la media.

Possiamo quindi riscrivere la (9.2) o la (9.3) come:

$$\mathrm{p}(t) = \mathrm{P} + \frac{1}{2} \mathrm{V_M I_M} \cos\left(2\omega t + (\alpha_v + \alpha_i)\right) = \mathrm{P} + \mathrm{V_{eff} I_{eff}} \cos\left(2\omega t + (\alpha_v + \alpha_i)\right) \qquad (9.5)$$

Ci chiediamo che espressione assuma la potenza p($t$) della (9.5) nel caso di bipoli passivi quali resistore, condensatore e induttore. Ricordando quanto visto nelle (8.39) per il resistore, (8.40) per l'induttore, (8.41) per il condensatore nella Lezione 8, possiamo affermare che la potenza media P per i tre bipoli passivi assume il valore rispettivamente per il resistore, l'induttore e il condensatore:

$$\mathrm{P_R} = \frac{1}{2} \mathrm{V_M I_M} \cos(0) = \frac{1}{2} \mathrm{V_M I_M} = \mathrm{V_{eff} I_{eff}} \qquad (9.6)$$

$$P_L = \frac{1}{2} V_M I_M \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \tag{9.7}$$

$$P_C = \frac{1}{2} V_M I_M \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \tag{9.8}$$

Quindi il resistore assorbe potenza media a differenza degli elementi reattivi che, avendo dei fasori rappresentativi di tensione e corrente sfasati di $\pm\pi/2$, non assorbono potenza media e vedono unicamente la potenza fluttuante.

## 1.2 La potenza definita nel dominio simbolico

In regime sinusoidale usiamo il metodo simbolico poiché esso agevola l'analisi dei circuiti e quindi vogliamo "trasportare" in quel dominio delle informazioni sugli aspetti energetici del sistema da studiare.

Ci chiediamo se sia possibile trasformare l'espressione (9.2) o (9.3) della potenza nel dominio simbolico. Come abbiamo anticipato nell'introduzione di questo paragrafo, la risposta è negativa. Essendo, infatti, la potenza il prodotto di due grandezze, la tensione e la corrente, che trasformiamo in fasori, non è una grandezza trasformabile nel dominio simbolico in quanto non ha una espressione come la (8.2) o (8.7) della Lezione 8. Pertanto, data l'importanza dell'aspetto energetico dei circuiti, sarà necessario definire una potenza direttamente nel dominio simbolico. A tale scopo introduciamo, nel dominio dei fasori, la seguente grandezza che chiamiamo ***potenza complessa***:

$$\begin{aligned} \overline{S} &= \frac{1}{2}\overline{V}\overline{I}^{*} = \frac{1}{2} V_M e^{j\alpha_v} I_M e^{-j\alpha_i} = \\ &= \frac{1}{2} V_M I_M \left(\cos\left(\alpha_v - \alpha_i\right) + j\,\mathrm{sen}\left(\alpha_v - \alpha_i\right)\right) = \\ &= \frac{1}{2} V_M I_M \cos\left(\varphi\right) + j\frac{1}{2} V_M I_M \mathrm{sen}\left(\varphi\right) = \\ &= V_{eff} I_{eff} \cos\left(\varphi\right) + j V_{eff} I_{eff} \mathrm{sen}\left(\varphi\right) \end{aligned} \tag{9.9}$$

dove $\overline{\mathrm{I}}^{*}$ rappresenta il coniugato del numero complesso $\overline{\mathrm{I}}$ come definito nella (A.22) dell'Appendice 2 della Lezione 8. La ***potenza complessa*** introdotta nella (9.9) non è una potenza "trasformata" nel dominio dei fasori, ma piuttosto di una grandezza "costruita" direttamente in tale dominio.

Si osservi dalla (9.9) che se i fasori $\overline{\mathrm{V}}$ e $\overline{\mathrm{I}}$ sono ottenuti con i valori efficaci, l'espressione corretta della potenza complessa non vuole il coefficiente davanti al prodotto $\overline{\mathrm{V}}\overline{\mathrm{I}}^{*}$. In altre parole, possiamo scrivere:

$$\overline{\mathrm{S}} = \frac{1}{2}\left(\overline{\mathrm{V}}\overline{\mathrm{I}}^{*}\right)_{\substack{con\\valori\\massimi}} = \left(\overline{\mathrm{V}}\overline{\mathrm{I}}^{*}\right)_{\substack{con\\valori\\efficaci}} \tag{9.10}$$

Occupiamoci di dare un senso alla grandezza appena introdotta. Osserviamo che la parte reale della potenza complessa è uguale alla potenza media P definita nel dominio del tempo della (9.4)

Possiamo scrivere la (9.9) nel seguente modo:

$$\overline{\mathrm{S}} = \frac{1}{2}\mathrm{V_M I_M}\left(\cos\left(\varphi\right) + j\mathrm{sen}\left(\varphi\right)\right) = \mathrm{V_{eff} I_{eff}}\left(\cos\left(\varphi\right) + j\mathrm{sen}\left(\varphi\right)\right) = \mathrm{P} + j\mathrm{Q} \tag{9.11}$$

dove abbiamo utilizzato la ***potenza attiva***:

$$\mathrm{P} = Re\left\{\overline{\mathrm{S}}\right\} = \frac{1}{2}\mathrm{V_M I_M}\cos\left(\varphi\right) = \mathrm{V_{eff} I_{eff}}\cos\left(\varphi\right) \tag{9.12}$$

e la ***potenza reattiva***:

$$\mathrm{Q} = Im\left\{\overline{\mathrm{S}}\right\} = \frac{1}{2}\mathrm{V_M I_M}\sin\left(\varphi\right) = \mathrm{V_{eff} I_{eff}}\sin\left(\varphi\right) \tag{9.13}$$

Abbiamo, in sostanza, detto che la potenza attiva P della (9.12) è uguale alla potenza media P della (9.4) definita nel dominio del tempo e quindi la parte reale della potenza complessa ha un'interpretazione fisica nel dominio del tempo. La potenza attiva introdotta nel dominio dei fasori, dunque, coincide con la potenza media (potenza "vera") introdotta nel dominio del tempo. Al contrario, la potenza reattiva Q della (9.13) non ha

corrispondenza nel dominio del tempo e non ha alcun significato fisico. Perché dunque la introduciamo? Il motivo è che la potenza reattiva tiene conto della presenza di elementi reattivi, come induttori e condensatori, nei circuiti che analizziamo nel dominio simbolico. Come vedremo nel prossimo paragrafo, e tenendo conto delle (9.6), (9.7) e (9.8), i resistori assorbono potenza attiva (media) non nulla, mentre gli elementi reattivi assorbono potenza attiva nulla in qualsiasi condizione di funzionamento del circuito a regime sinusoidale. Al contrario, i resistori, come vedremo, non assorbono potenza reattiva a differenza degli elementi reattivi. Concludiamo che la potenza reattiva Q tiene conto del fatto che esistono nei circuiti bipoli che, anche se non assorbono potenza media, possono immagazzinare energia. Infatti, come vedremo nel prossimo paragrafo, la potenza reattiva è legata all'energia magnetica immagazzinata in un induttore e a quella elettrica immagazzinata in un condensatore. Inoltre, essendo il seno una funzione dispari, il segno della potenza reattiva dipende dal segno dello sfasamento $\varphi$. In particolare, per i condensatori, essendo $\varphi$ negativo, si ha potenza reattiva $Q_C$ negativa; viceversa, per gli induttori, essendo l'angolo $\varphi$ positivo, si osserva una potenza reattiva $Q_L$ positiva. Come si vede dunque, il segno di Q ci basta ad individuare la natura del carico considerato.

Introduciamo, infine, la ***potenza apparente*** che è il modulo della potenza complessa:

$$S = \left|\bar{S}\right| = \sqrt{P^2 + Q^2} \tag{9.14}$$

Per quanto riguarda le unità di misura, per la potenza attiva P si usa il **Watt** (**W**), essendo essa effettivamente una potenza, mentre per la potenza reattiva Q si utilizza il ***VAr*** che corrisponde al ***Volt - Ampere - reattivo***.

Risulta molto utile introdurre il cosiddetto ***triangolo delle potenze***: esso consiste in una rappresentazione grafica della potenza complessa $\bar{S}$ nel piano complesso con le sue proiezioni sugli assi: P sull'asse reale e Q sull'asse immaginario. Lo abbiamo mostrato in Fig. 9.2.

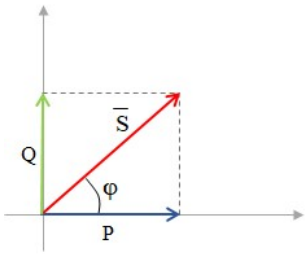



*Fig. 9.2 – Triangolo delle potenze nel dominio dei fasori.*

Nel prossimo paragrafo vedremo quanto valgono la potenza attiva e quella reattiva nei tre bipoli passivi.

### *1.2.1 La potenza complessa nei bipoli passivi e attivi*

Dalla Tabella 8.1 della Lezione 8, e dalla espressione della potenza complessa (9.11) con la (9.12) e (9.13), si ha per il resistore:

$$\bar{S}=P_R=\frac{1}{2}V_M I_M=\frac{1}{2}RI_M^2=\frac{1}{2}\frac{V_M^2}{R}=V_{eff}I_{eff}=RI_{eff}^2=\frac{V_{eff}^2}{R} \tag{9.15}$$

con la potenza reattiva assorbita $Q_R=0$.

Dalla Tabella 8.1 della Lezione 8, e dalla espressione della potenza complessa (9.11) con la (9.12) e (9.13), si ha per l'induttore:

$$\begin{aligned}\bar{S}=jQ_L&=j\frac{1}{2}V_M I_M=j\frac{1}{2}\omega LI_M^2=j\frac{1}{2}\frac{V_M^2}{\omega L}=\\&=jV_{eff}I_{eff}=j\omega LI_{eff}^2=j\frac{V_{eff}^2}{\omega L}\end{aligned} \tag{9.16}$$

con la potenza attiva assorbita $P_L=0$ .

Dalla Tabella 8.1 della Lezione 8, e dalla espressione della potenza complessa (9.11) con la (9.12) e (9.13), si ha per il condensatore:

$$\begin{aligned}\bar{S}=jQ_C &= -j\frac{1}{2}V_M I_M = -j\frac{1}{2}\omega C V_M^2 = -j\frac{1}{2}\frac{I_M^2}{\omega C} = \\ &= -jV_{eff}I_{eff} = -j\omega C V_{eff}^2 = -j\frac{I_{eff}^2}{\omega C}\end{aligned} \tag{9.17}$$

con la potenza attiva assorbita $P_C = 0$.

In Tabella 9.1 abbiamo sintetizzato le espressioni della potenza attiva e reattivi per i bipoli passivi.

| | Relazione caratteristica | P | Q | φ |
|---|---|---|---|---|
| Resistore | $\bar{V} = R\bar{I}$ | $P_R = \frac{1}{2}RI_M^2 = \frac{1}{2}\frac{V_M^2}{R}$ | $Q_R = 0$ | $\varphi_R = 0$ |
| Induttore | $\bar{V} = j\omega L\bar{I}$ | $P_L = 0$ | $Q_L = \frac{1}{2}\omega LI_M^2 = \frac{1}{2}\frac{V_M^2}{\omega L}$ | $\varphi_L = \frac{\pi}{2}$ |
| Condensatore | $\bar{V} = -j\frac{1}{\omega C}\bar{I}$ | $P_C = 0$ | $Q_C = -\frac{1}{2}\omega CV_M^2 = -\frac{1}{2}\frac{I_M^2}{\omega C}$ | $\varphi_C = -\frac{\pi}{2}$ |

*Tabella 9.1 – Potenza complessa per i bipoli passivi.*

Cosa dire della potenza complessa erogata dai generatori presenti nel circuito?

In generale avremo che i generatori presenti in un circuito erogano sia potenza attiva che potenza reattiva. In questo modo forniranno ai bipoli passivi presenti nel circuito la potenza attiva P e reattiva Q richiesta. Nel § 2 vedremo che sussiste una legge di conservazione, analoga al teorema di Tellegen nel dominio del tempo, della potenza complessa. In virtù di questo risultato possiamo affermare che la potenza attiva e reattiva

erogate dai generatori devono uguagliare quella attiva e reattiva complessivamente assorbita dal carico. In particolare, sommate tutte le potenze attive dei resistori e tutte le potenze reattive degli elementi reattivi, i generatori erogheranno potenza attiva complessiva uguale a quella calcolata e, analogamente, potenza reattiva uguale a quanto calcolato. Nell'esercizio del § 3.3 applicheremo quanto appena scritto.

### *1.2.2 La potenza e la sovrapposizione degli effetti*

Si può utilizzare la sovrapposizione degli effetti nel calcolo della potenza quando vi sono presenti in un circuito a regime sinusoidale più generatori di iso−frequenziali?

Per poter rispondere a questa domanda osserviamo che la potenza è definita come prodotto della tensione per la corrente e quindi sebbene sia la tensione che la corrente, grazie alla linearità del sistema, sono la somma delle risposte ai vari generatori, la potenza non risulterà anch'essa pari ad una somma di contributi. La potenza, dunque, non può calcolarsi con il principio di sovrapposizione degli effetti e sarà pertanto necessario calcolare i fasori tensione e corrente dovuti ai vari generatori con il principio di sovrapposizione e solo in seguito calcolare la potenza come prodotto tra i due fasori complessivi.

Per analizzare nel dettaglio il calcolo della potenza nel caso di circuiti con più generatori, consideriamo il caso semplice di due generatori come abbiamo fatto nella Fig. 8.15 della Lezione 8. Supponiamo che i due generatori siano due funzioni sinusoidali di diversa pulsazione $\omega_1$ e $\omega_2$ e riscriviamo le (8.85) della Lezione 8 per la tensione e la corrente di un generico bipolo passivo:

$$v(\omega_1,\omega_2,t) = v_1(\omega_1,t) + v_2(\omega_2,t) = V_{M1}\cos(\omega_1 t + \alpha_{v1}) + V_{M2}\cos(\omega_2 t + \alpha_{v2}) \quad (9.18)$$

$$i(\omega_1,\omega_2,t) = i_1(\omega_1,t) + i_2(\omega_2,t) = I_{M1}\cos(\omega_1 t + \alpha_{i1}) + I_{M2}\cos(\omega_2 t + \alpha_{i2}) \quad (9.19)$$

Ricordiamoci che, come visto nel § 4 della Lezione 8, la tensione (9.18) e la corrente (9.19), somma di due sinusoidi, non sono necessariamente una funzione sinusoidale. Questo accadrà solo se le due pulsazioni $\omega_1$ e $\omega_2$ sono uguali (vedi Fig. A.4 dell'Appendice 1 della Lezione 8). Nel caso contrario distinguiamo due casi: le pulsazioni

sono tra loro commensurabili ($\omega_1=n\omega_2$ con n=1,2, …), ed allora la somma è una funzione periodica (vedi Fig. A.5 dell'Appendice 1 della Lezione 8); le pulsazioni non sono commensurabili ($\omega_2 \neq n\omega_1$ con n=1, 2, 3, ...), ed allora la funzione non è neanche periodica (vedi Fig. A.6 dell'Appendice 1 della Lezione 8). In corrispondenza di questi casi, vediamo cosa accade alla potenza. La potenza istantanea assorbita da un generico bipolo del circuito (supponiamo di aver fatto la convenzione dell'utilizzatore sul bipolo considerato) alimentato da due generatori sinusoidali di pulsazione $\omega_1$ e $\omega_2$, grazie alle (9.18) e (9.19) risulta essere:

$$\begin{aligned} p(\omega_1,\omega_2,t) &= v(\omega_1,\omega_2,t)i(\omega_1,\omega_2,t) = \\ &= \big(v_1(\omega_1,t)+v_2(\omega_2,t)\big)\big(i_1(\omega_1,t)+i_2(\omega_2,t)\big) = \\ &= v_1(\omega_1,t)i_1(\omega_1,t)+v_1(\omega_1,t)i_2(\omega_2,t)+v_2(\omega_2,t)i_1(\omega_1,t) \\ &\quad + v_2(\omega_2,t)i_2(\omega_2,t) \end{aligned} \tag{9.20}$$

Si vede che la potenza istantanea non è la semplice sovrapposizione delle due potenze istantanee relative ai due ingressi. Vediamo cosa dire della potenza attiva P. Per valutarla sarà necessario fare una operazione di media in un dato periodo temporale. Dobbiamo necessariamente distinguere i tre casi:

1) $\omega_1=\omega_2=\omega$

In questo caso basta considerare la media della potenza istantanea come nella (9.4):

$$\begin{aligned} P &= \langle p(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T v(t)\,i(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \big(v_1\,i_1+v_2\,i_2+v_1\,i_2+v_2\,i_1\big)\,dt = \\ &= \frac{1}{2}V_{M1}I_{M1}\cos\varphi_1+\frac{1}{2}V_{M2}I_{M2}\cos\varphi_2+\frac{1}{T}\int_0^T v_1\,i_2\,dt+\frac{1}{T}\int_0^T v_2\,i_1\,dt \end{aligned} \tag{9.21}$$

dove $T=2\pi/\omega$, $\varphi_1=\alpha_{v1}-\alpha_{i1}$ e $\varphi_2=\alpha_{v2}-\alpha_{i2}$.

Si può dimostrare facilmente che gli ultimi due integrali non sono nulli. Si ha infatti:

$$\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} v_1\, i_2 dt = \frac{1}{\mathrm{T}}\mathrm{V_M I_M}\int_0^{\mathrm{T}} \cos\left(\frac{2\pi}{\mathrm{T}}t+\alpha_{v1}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{\mathrm{T}}t+\alpha_{i2}\right)dt \neq 0 \qquad (9.22)$$

Pertanto in questo caso la potenza non è additiva!

2) $\omega_2 = n\omega_1$ con n=2, 3, ...

Anche in questo caso basta considerare la media della potenza istantanea come nella (9.4):

$$\begin{aligned} \mathrm{P} &= \langle \mathrm{p}(t) \rangle = \frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} v(t)\, i(t)\, dt = \frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} \left(v_1\, i_1 + v_2\, i_2 + v_1\, i_2 + v_2\, i_1\right) dt = \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{V_{M1} I_{M1}}\cos\varphi_1 + \frac{1}{2}\mathrm{V_{M2} I_{M2}}\cos\varphi_2 \end{aligned} \qquad (9.23)$$

dove $\mathrm{T}=2\pi/\omega_1$, $\varphi_1 = \alpha_{v1} - \alpha_{i1}$ e $\varphi_2 = \alpha_{v2} - \alpha_{i2}$.

Nella (9.28) abbiamo considerato solo i primi due termini al secondo membro in quanto i termini dovuti ai prodotti "misti" tra tensione e corrente è facile verificare che sono nulli. Si ha infatti per il primo dei due termini:

$$\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} v_1\, i_2 dt = \frac{1}{\mathrm{T}}\mathrm{V_M I_M}\int_0^{\mathrm{T}} \cos\left(\frac{2\pi}{\mathrm{T}}t+\alpha_{v1}\right)\cos\left(\mathrm{n}\frac{2\pi}{\mathrm{T}}t+\alpha_{i2}\right)dt = 0 \qquad (9.24)$$

Lo stesso risultato lo otteniamo con il secondo termine misto.

In questo quindi la potenza risulterà additiva!

3) $\omega_2 \neq n\omega_1$ con n=1, 2, 3, ...

In questo caso non ha senso calcolare la potenza media non essendo la funzione periodica!

Nel nostro corso affronteremo esercizi che verificano la condizione $\omega_1 = \omega_2$ e pertanto dobbiamo tener conto del fatto che la potenza non segue il principio di sovrapposizione degli effetti e che per calcolarla è necessario calcolare la tensione e la corrente dovuti ai diversi generatori e poi moltiplicare la tensione totale per la corrente totale.

## 2 Il teorema di Tellegen in regime sinusoidale

Una volta introdotta la potenza in regime sinusoidale, occupiamoci di stabilire se sono valide delle leggi di conservazione della potenza complessa in maniera analoga a quanto abbiamo fatto nel dominio del tempo per la potenza istantanea enunciando il teorema di Tellegen. In questo paragrafo faremo vedere che è possibile enunciare il teorema di Tellegen anche nel dominio simbolico e che in tal caso esso vale per le potenze complesse. Ricordiamo che, nel dominio del tempo, il teorema ci dice che si conservano le potenze istantanee virtuali. E ciò sarà vero anche in regime sinusoidale, sempre nel dominio del tempo. Potremmo trasformare l'espressione (3.38) della Lezione 3 che esprime l'enunciato del teorema, ma sappiamo che non avrebbe senso in quanto non è possibile trasformare la potenza p(*t*) alla stregua delle grandezze elettriche trasformate in fasori. E quindi, non possiamo trasformare neanche la (3.38). Del resto, la potenza complessa è un costrutto introdotto direttamente nel dominio simbolico e non ottenuto dalla trasformazione dal dominio del tempo di una grandezza ivi definita.

Ciò premesso, in riferimento a due circuiti diversi ma topologicamente uguali, volendo comunque dotarci di uno strumento che rappresenti una legge di conservazione delle potenze complesse, ispirati dal teorema di Tellegen enunciato nel dominio del tempo, enunciamo nel dominio simbolico il seguente teorema:

***Teorema di Tellegen nel dominio simbolico***:

*La somma dei prodotti dei **fasori** della tensione di un circuito per i **fasori coniugati** della corrente dell'altro circuito relativi a lati corrispondenti è nulla, avendo fatto la stessa convenzione su tutti i bipoli dei due circuiti.*

Indichiamo con il l'indice "$'$" le grandezze di un circuito, e con l'indice "$''$" le grandezze dell'altro. Possiamo scrivere in formule:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{l}\overline{\mathrm{V}}_i'\overline{\mathrm{I}}_i''^{*}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{l}\overline{\mathrm{V}}_i''\overline{\mathrm{I}}_i'^{*}=0 \qquad (9.25)$$

dove $i$ è indica il generico lato degli $l$ presenti nel circuito.

L'espressione (9.25) ci dice che la somma delle ***potenze virtuali complesse*** assorbite (o erogate) in un circuito è zero. Osserviamo che il fattore ½ è presente nell'enunciato (9.25)

del teorema per poter dire che sommiamo potenze complesse come la (9.9). Si tratta tuttavia, in generale, di potenze virtuali in quanto le tensioni e le correnti appartengono a circuiti diversi tra loro. Nella (9.25), i termini della sommatoria hanno tutti lo stesso segno avendo fatto la stessa convenzione su tutti i bipoli.

Per dimostrare la (9.25), facciamo riferimento alla prima sommatoria, e scriviamola in forma compatta matriciale:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{l} \bar{V}_i' \bar{I}_i''^{*} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{l} \bar{I}_i''^{*} \bar{V}_i' = \frac{1}{2} \bar{I}''^{*\mathrm{T}} \cdot \bar{V}' \tag{9.26}$$

dove abbiamo invertito la moltiplicazione $\bar{V}_i' \bar{I}_i''^{*} = \bar{I}_i''^{*} \bar{V}_i'$, e dove abbiamo considerato i vettori $\bar{\mathbf{I}}''^{*\mathrm{T}} = \left\{ \bar{I}_1''^{*}, \bar{I}_2''^{*}, \ldots \bar{I}_l''^{*} \right\}$ e $\bar{\mathbf{V}}' = \left\{ \bar{V}_1', \bar{V}_2', \ldots \bar{V}_l' \right\}^{\mathrm{T}}$. Al secondo membro abbiamo un prodotto scalare tra un vettore riga e un vettore colonna.

Sappiamo dalla Lezione 8 che la prima legge di Kirchhoff vale anche nel dominio simbolico (vedi la (8.21) della Lezione 8) ed inoltre, grazie alle proprietà (A.23) e (A.24) dell'Appendice 2 della lezione 8, la LKC vale anche per i coniugati dei fasori della corrente, come espresso nella (8.22) della Lezione 8, e quindi è possibile scrivere la LKC con i coniugati dei fasori corrente, in forma compatta:

$$\mathbf{A}_{\mathrm{r}} \bar{\mathbf{I}}^{*} = 0 \tag{9.27}$$

dove $\mathbf{A}_{\mathrm{r}}$ è la matrice d'incidenza ridotta.

Osserviamo poi che il fasore della tensione $\bar{V}_i$ può essere espresso come differenza di potenziale di nodo e quindi:

$$\bar{V}_i = \bar{\Phi}_s - \bar{\Phi}_r \tag{9.28}$$

dove il lato *i*-simo afferisce ai nodi ***s*** ed *r*. Le *l*-(*n*-1) equazioni indipendenti della seconda legge di Kirchhoff si possono scrivere in forma compatta, come abbiamo fatto nella (8.22) della Lezione 8:

$$\bar{\mathbf{V}} = \mathbf{A}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{T}} \cdot \bar{\boldsymbol{\Phi}} \tag{9.29}$$

Fatte queste osservazioni, la dimostrazione del teorema di Tellegen nel dominio simbolico si dipana allo stesso modo della dimostrazione del teorema nel dominio del tempo (vedi § 7 della Lezione 3). Dalla (9.26) e dalla (9.29), otteniamo:

$$\overline{\mathbf{I}}''^{*\mathrm{T}} \cdot \overline{\mathbf{V}}' = \overline{\mathbf{I}}''^{*\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{T}} \cdot \overline{\mathbf{\Phi}} \tag{9.30}$$

che possiamo riscrivere, utilizzando la proprietà delle matrici trasposte $(AB)^T=B^TA^T$:

$$\overline{\mathbf{I}}''^{*\mathrm{T}} \cdot \overline{\mathbf{V}}' = \overline{\mathbf{I}}''^{*\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{T}} \cdot \overline{\mathbf{\Phi}} = \left( \mathbf{A}_{\mathrm{r}} \cdot \overline{\mathbf{I}}''^{*} \right)^{\mathrm{T}} \cdot \overline{\mathbf{\Phi}} = 0 \tag{9.31}$$

La (9.31) risulta nulla in virtù della (9.27).

Quindi, analogamente a quanto fatto nel dominio del tempo (Lezione 3), abbiamo dimostrato che esiste, nel dominio dei fasori, una legge di conservazione delle potenze virtuali complesse.

Facendo riferimento ad unico circuito, essendo:

$$\sum_{i=1}^{l} \overline{\mathrm{V}}_i \hat{\overline{\mathrm{I}}}_i^{*} = \sum_{i=1}^{l} \mathrm{V}_{\mathrm{M}_i} \mathrm{e}^{j\alpha_{vi}} \mathrm{I}_{\mathrm{M}_i} \mathrm{e}^{-j\alpha_{ii}} \tag{9.32}$$

Si ha, posto $\varphi_i = \alpha_{vi} - \alpha_{ii}$, la seguente espressione:

$$\sum_{i=1}^{l} \overline{\mathrm{V}}_i \overline{\mathrm{I}}_i^{*} = \sum_{i=1}^{l} \left( \frac{1}{2} \mathrm{V}_{\mathrm{M}_i} \mathrm{I}_{\mathrm{M}_i} \cos\varphi_i + j \frac{1}{2} \mathrm{V}_{\mathrm{M}_i} \mathrm{I}_{\mathrm{M}_i} \sin\varphi_i \right) = \sum_{i=1}^{l} \mathrm{P}_i + j \sum_{i=1}^{l} \mathrm{Q}_i \tag{9.33}$$

Per il teorema di conservazione (9.25), abbiamo infine che:

$$\sum_{i=1}^{l} \mathrm{P}_i + j \sum_{i=1}^{l} \mathrm{Q}_i = 0 \tag{9.34}$$

e quindi concludiamo che abbiamo ottenuto una legge di conservazione della potenza attiva:

$$\sum_{i=1}^{l} \mathrm{P}_i = 0 \tag{9.35}$$

e una legge di conservazione della potenza reattiva:

$$\sum_{i=1}^{l} Q_i = 0 \tag{9.36}$$

In conclusione: in un circuito si verifica sempre un bilancio di potenze attive e reattive. La potenza attiva erogata dai generatori uguaglierà la somma di tutte le potenze attive assorbite dai bipoli passivi (resistori). La potenza reattiva erogata dai generatori uguaglierà la somma di tutte le potenze reattive assorbite dai bipoli passivi (quelli reattivi).

# 3 Esercizi

## 3.1 Il calcolo della potenza di un bipolo

Dato il bipolo avente come fasori rappresentativi di tensione e corrente, rispettivamente:

$$\bar{V} = 3 - j5 \tag{9.37}$$

$$\bar{I} = -2 + j \tag{9.38}$$

I fasori sono stati ottenuti mediante il valore efficace (vedi la (8.7) della Lezione 8). Calcolare la potenza attiva e reattiva generata dal bipolo.

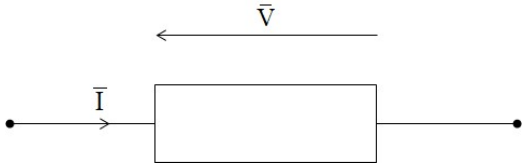



*Fig. 9.3 – Un bipolo con la convenzione dell'utilizzatore.*

Per risolvere l'esercizio possiamo usare la formula (9.9). Dobbiamo tuttavia sapere se i due fasori assegnati sono stati ottenuti con il valore massimo delle sinusoidi o con il valore efficace. L'esercizio specifica che sono stati usati i valori efficaci e quindi useremo nella (9.10) la seconda espressione per la potenza complessa:

$$\bar{S} = -\bar{V}\bar{I}^{*} = -(3 - j5)(-2 - j) = 6 - j10 + j3 + 5 = 11 - j7 \tag{9.39}$$

Nella (9.39) abbiamo considerato un segno meno davanti all'espressione della (9.10) perché ci viene richiesta la potenza complessa generata e sul bipolo è stata fatta la convenzione dell'utilizzatore. Abbiamo, inoltre, cambiato il segno alla parte immaginaria del fasore della corrente perché la formula richiede il suo coniugato (vedi la (A.22) dell'Appendice 2 della Lezione 8). Dalla (9.39) ricaviamo la potenza attiva:

$$P = 11W \tag{9.40}$$

e quella reattiva:

$$Q = -7Var \tag{9.41}$$

😊

Dalla (9.40) e dalla (9.41) osserviamo che il bipolo è un bipolo attivo in quanto la potenza attiva erogata è positiva ed inoltre che la parte reattiva equivalente presente nel bipolo è di tipo capacitivo.

## 3.2 Il calcolo della potenza assorbita da un bipolo in un circuito

In riferimento al circuito di Fig. 9.4, che si trova a regime, calcolare la potenza attiva assorbita dal resistore $R_4$ e la potenza reattiva assorbita dall'unico condensatore presente[1].

DATI: $R_4=1\Omega$; $v_{s1}(t)=2\cos(3t+30°)V$; $\omega=3rad/s$.

Poiché ci viene richiesto il valore della potenza attiva e reattiva nel dominio simbolico, la prima cosa da fare è trasformare il termine noto, ossia il generatore di tensione, nel dominio simbolico. Poniamo:

$$\bar{V}_{s1} = 2 \tag{9.42}$$

[1] Questo esercizio è stato ottenuto dalla piattaforma https://autocircuits.org/autocir_home.html realizzata dal prof. Stefano Grivet-Talocia del Politecnico di Torino. È possibile generare altri esercizi risolti utilizzando il sito che prevede varie categorie di esercizi.

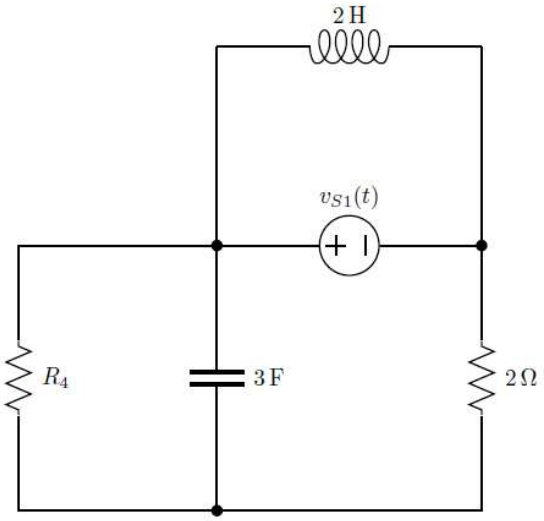



*Fig. 9.4 – Circuito in regime sinusoidale.*

Abbiamo scelto la trasformazione (8.2) della Lezione 8. Inoltre, abbiamo scelto di non tenere conto nella trasformazione della fase di 30° del generatore $v_{s1}(t)$ (confronta esercizio del § 2.3.1 della Lezione 8). La scelta di non "trasportare" nel dominio dei fasori il termine $e^{j30^\circ}$, dovuto alla presenza della fase nel generatore, dipende dal fatto che la potenza attiva e reattiva richiesta non dipendono dalla presenza di questo fattore. Questo fattore comparirebbe in tutti i fasori del circuito e quindi anche nella tensione e corrente del resistore $R_4$. Tuttavia, come possiamo vedere dalla Tabella 9.1, le espressioni della potenza attiva del resistore e della potenza reattiva del condensatore non dipendono dalle fasi dei rispettivi fasori tensione e corrente.

Dobbiamo individuare una strategia risolutiva (vedi § 3 della Lezione 8) per risolvere l'esercizio. Fra le diverse opzioni in questo paragrafo proponiamo la seguente: calcolare l'impedenza equivalente $\dot{Z}_{eq}$ del parallelo del resistore di resistenza $R_4$ con il condensatore di reattanza $X_C$, fare un partitore di tensione tra la $\dot{Z}_{eq}$ e la resistenza di 2Ω. Una volta trovata la tensione su $\dot{Z}_{eq}$, diciamola $V_{M_4}$, possiamo utilizzare, dalla Tabella 9.1, le espressioni della potenza attiva per resistore $R_4$:

$$P_{R_4} = \frac{1}{2}\frac{V_{M_4}^2}{R_4} \tag{9.43}$$

e la potenza reattiva per il condensatore:

$$Q_C = \frac{1}{2}\frac{V_{M_4}^2}{X_C} \tag{9.44}$$

Le (9.43) e (9.44) sussistono in quanto la tensione sul resistore $R_4$ e sul condensatore è la stessa $V_{M_4}$.

Procediamo con i calcoli. Abbiamo per la $\dot{Z}_{eq}$:

$$\dot{Z}_{eq} = \frac{R_4 j X_C}{R_4 + j X_C} = -j\frac{1/9}{1 - j1/9} = -j\frac{1}{82}(9+j) = \frac{1}{82}(1 - j9) \tag{9.45}$$

Ora eseguiamo il partitore di tensione:

$$\bar{V}_{M_4} = \frac{\dot{Z}_{eq}}{R_2 + \dot{Z}_{eq}}\bar{V}_{s_1} = \frac{(1-j9)}{164 + (1-j9)}2 = \frac{326 - j36}{27306} = 0.0180 - j0.1081 \tag{9.46}$$

Ed infine applichiamo le (9.43):

$$P_{R_4} = \frac{1}{2}\frac{V_{M_4}^2}{R_4} = 6\text{mW} \tag{9.47}$$

e (9.44):

$$Q_C = \frac{1}{2}\frac{V_{M_4}^2}{X_C} = -0.054\text{mVAr} \tag{9.48}$$

😊

## 3.3 La verifica della conservazione della potenza in un circuito

In riferimento al circuito di Fig. 9.5, che si trova a regime, verificare la conservazione della potenza complessa del circuito[2].

DATI: $C_3$=1F; $i_{s1}(t)$=cos($t$+30°)A; ω=1rad/s.

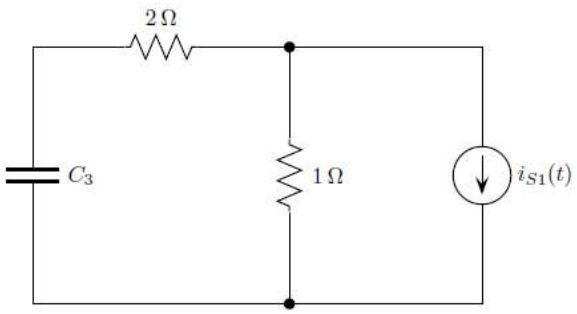



*Fig. 9.5 – Circuito in regime sinusoidale.*

La prima cosa da fare è trasformare il termine noto, ossia il generatore di corrente, nel dominio simbolico. Poniamo:

$$\overline{I}_{s1} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j\frac{\pi}{6}} \tag{9.49}$$

Abbiamo scelto la trasformazione (8.7) della Lezione 8. Inoltre, abbiamo scelto di tenere conto, nella trasformazione, della fase di 30° del generatore $i_{s1}(t)$ per esercizio, consapevoli di quanto affermato nell'esercizio precedente del § 3.2, e cioè che la fase del fasore $\overline{I}_{s1}$ che compare nella (9.49) non condiziona il calcolo delle potenze attive e reattive del circuito.

[2] Questo esercizio è stato ottenuto dalla piattaforma https://autocircuits.org/autocir_home.html realizzata dal prof. Stefano Grivet-Talocia del Politecnico di Torino. È possibile generare altri esercizi risolti utilizzando il sito che prevede varie categorie di esercizi.

Prima di individuare la strategia risolutive del problem solving, occupiamoci di impostare il problem shaping[3] e formuliamo il problema nel modo seguente: affinché sia verificata la conservazione della potenza complessa, dovrà essere verificata la conservazione della potenza attiva:

$$P_{R_1} + P_{R_2} = P_g \Rightarrow R_1 I_{eff_1}^2 + R_2 I_{eff_2}^2 = Re\left\{\bar{V}_g \bar{I}_{s1}^*\right\} \tag{9.50}$$

e di quella reattiva:

$$Q_{C_3} = Q_g \Rightarrow X_C I_{eff_2}^2 = Im\left\{\bar{V}_g \bar{I}_{s1}^*\right\} \tag{9.51}$$

Nelle (9.50) e (9.51) abbiamo indicato con $R_1$ la resistenza di 1Ω, $R_2$ la resistenza di 2Ω, $X_C$=–1Ω la reattanza del condensatore, $I_{eff_1}$ la corrente del resistore $R_1$, $I_{eff_2}$ la corrente della serie del resistore $R_2$ con il condensatore, $\bar{V}_g$ il fasore della tensione del generatore di corrente preso con la convenzione del generatore sul bipolo, $P_{R_1}$ la potenza attiva assorbita dal resistore $R_1$, $P_{R_2}$ la potenza attiva assorbita dal resistore $R_2$, $P_g$ la potenza attiva erogata dal generatore, $Q_{C_3}$ la potenza reattiva assorbita dal condensatore, ed infine $Q_g$ la potenza reattiva erogata dal generatore.

Il problema posto dall'esercizio è stato formulato con la verifica delle (9.50) e (9.51). Per poter risolvere il problema è necessario calcolare tutti i termini presenti nelle (9.50) e (9.51). A tale scopo ci serve conoscere: il fasore $\bar{V}_g$, $I_{eff_1}$ e $I_{eff_2}$. A questo punto è possibile disegnare una strategia risolutiva che miri a conoscere le grandezze individuate con il problem shaping. Tra tutte le possibili strategie (quante ne trovate?) noi vi proponiamo quanto segue. Calcoliamo, con la formula di Millman (vedi § 2.3 della Lezione 8) il fasore $\bar{V}_g$ della tensione sul generatore:

[3] Vedi nota 8 a pagina 68 della Lezione 4.

$$\bar{V}_g = \frac{\bar{I}_{s1}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2+jX_C}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}e^{j\frac{\pi}{6}}}{1+\frac{1}{2-j}} = 0.5e^{j\left(\frac{\pi}{6}-0.14\right)} \tag{9.52}$$

Per calcolare $I_{eff_1}$ e $I_{eff_2}$, possiamo utilizzare la (9.52):

$$I_{eff_1} = \frac{V_g}{R_1} = 0.5A \tag{9.53}$$

e

$$I_{eff_2} = \frac{V_g}{\sqrt{R_2^2+X_C^2}} = \frac{0.5}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{20}} = 0.2236A \tag{9.54}$$

Prima di utilizzare le (9.50) e (9.51) ci serve calcolare la potenza complessa erogata dal generatore:

$$\bar{V}_g \bar{I}_{s1}^* = 0.5e^{j\left(\frac{\pi}{3}-0.14\right)} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-j0.14} = \frac{1}{20}(7-j) \tag{9.55}$$

Osserviamo come il fattore $e^{j\frac{\pi}{6}}$ non condiziona il valore della potenza complessa erogata dal generatore. Dalla (9.50):

$$(0.5)^2 + 2\left(\frac{1}{\sqrt{20}}\right)^2 = \frac{7}{20} \tag{9.56}$$

Dalla (9.51):

$$-\left(\frac{1}{\sqrt{20}}\right)^2 = -\frac{1}{20} \tag{9.57}$$

😊

## 4 I circuiti in regime sinusoidale con wattmetro

In questo paragrafo, in relazione a circuiti in regime sinusoidale, introdurremo nel dominio simbolico i wattmetri per misurare la potenza attiva assorbita o erogata da un bipolo.

Nella Lezione 2 abbiamo introdotto il wattmetro e, in particolare, nella Fig. 2.28 abbiamo mostrato come si inserisce tale strumento di misura allo scopo di misurare la potenza assorbita o erogata dal bipolo B indicato in figura (nel caso della figura misurava la potenza assorbita). In regime sinusoidale, il wattmetro misura la potenza media. Pertanto, se usiamo il wattmetro nel dominio simbolico, dove trattiamo grandezze complesse come i fasori, possiamo affermare che il wattmetro misura la potenza attiva assorbita o erogata dal bipolo B. Facciamo riferimento alla Fig. 9.6 che rappresenta la Fig. 2.28 della Lezione 2, ma stavolta nel dominio simbolico.

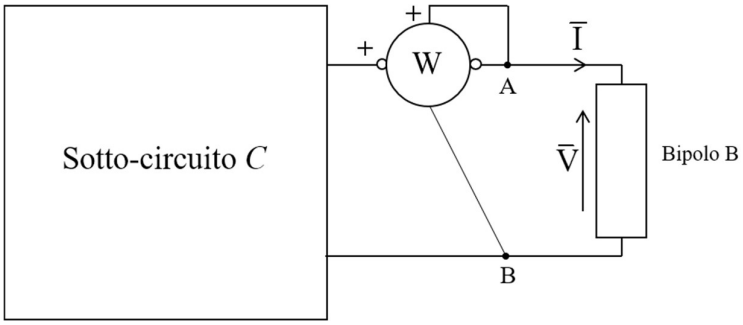



*Fig. 9.6 – Inserimento di un Wattmetro in un circuito a regime sinusoidale nel dominio simbolico.*

Per determinare, dunque, la misura effettuata dal wattmetro sarà necessario calcolare il fasore tensione $\bar{V}=V_M e^{j\alpha_v}$ ed il fasore corrente $\bar{I}=I_M e^{j\alpha_i}$ del bipolo B, e poi calcolare:

$$W=Re\left\{\frac{1}{2}\bar{V}\bar{I}^*\right\}=\frac{1}{2}V_M I_M\cos(\varphi)=V_{eff}I_{eff}\cos(\varphi) \qquad (9.58)$$

Talvolta il wattmetro non misura esattamente la potenza attiva riferita ad un bipolo specifico del circuito, in quanto l'amperometrica misura la corrente in un dato lato e la

voltmetrica misura la tensione in un altro lato del circuito. Nel prossimo sotto-paragrafo ci imbatteremo nella soluzione di un circuito così fatto.

## 4.1 Esercizi

In questo paragrafo utilizzeremo il circuito di Fig. 9.7 per risolvere diversi esercizi.

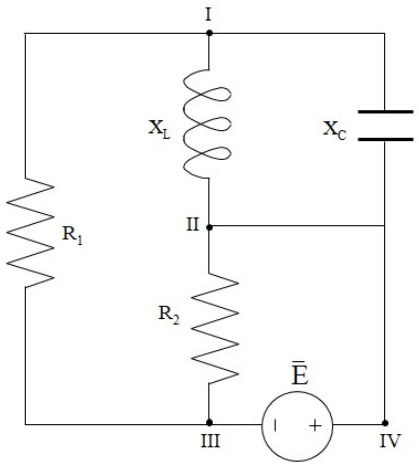



*Fig. 9.7 – Circuito in regime sinusoidale.*

### *4.1.1 Calcolo della potenza attiva virtuale misurata dal wattmetro*

Si vuole calcolare la misura del wattmetro nel circuito di Fig. 9.8.

DATI: $e(t)=3\cos(100t)$ V; $R_1=10\ \Omega$, $R_2=10\ \Omega$; $X_L=10\ \Omega$; $X_C=-12\ \Omega$)

Nel circuito in esame, la voltmetrica e l'amperometrica non misurano grandezze relative ad un unico bipolo. Osserviamo che l'amperometrica misura la corrente del resistore $R_1$ e la voltmetrica misura la tensione tra i nodi II e IV. Pertanto, il wattmetro non misura una "reale" potenza attiva assorbita o erogata da un bipolo. Si tratta piuttosto di una potenza virtuale.

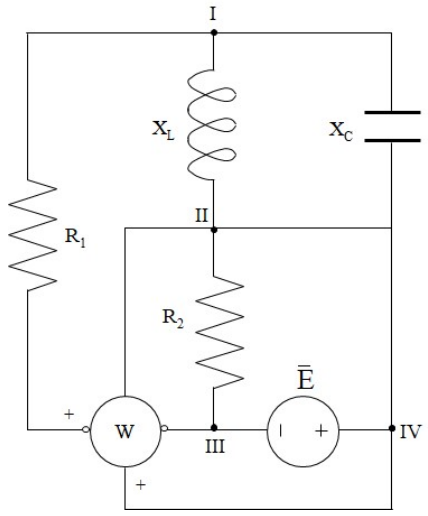



*Fig. 9.8 – Circuito in regime sinusoidale con wattmetro.*

Volendo rispondere alla consegna dell'esercizio diamo un nome alla corrente e alla tensione che servono al calcolo della potenza virtuale misurata dal wattmetro. Facciamo riferimento alla Fig. 9.9 dove abbiamo rimosso il wattmetro e indicato i due fasori delle due grandezze che ci interessano: la corrente $\bar{I}$ e la tensione $\bar{V}$. Supponiamo di aver scelto i fasori e non i fasori efficaci.

Il wattmetro misurerà una potenza virtuale attiva $P_W$:

$$P_W = \frac{1}{2} Re\left\{\bar{V}\bar{I}^*\right\} = Re\left\{\bar{V}_{eff}\bar{I}_{eff}^*\right\} \qquad (9.59)$$

con $\bar{I}^*$ fasore coniugato del fasore $\bar{I}$, $\bar{V}_{eff}$ e $\bar{I}_{eff}$ sono i fasori efficaci, quando, cioè, sono stati utilizzati i valori efficaci anziché i valori massimi nella trasformazione nel dominio simbolico.

Per risolvere l'esercizio basterà quindi calcolare i fasori $\bar{V}$ e $\bar{I}$ ($\bar{V}_{eff}$ e $\bar{I}_{eff}$) e poi utilizzare la formula (9.59). Dalla figura Fig. 9.9, si evince immediatamente che il fasore della tensione è nullo $\bar{V}$, pertanto la potenza attiva risulterà nulla!

😉

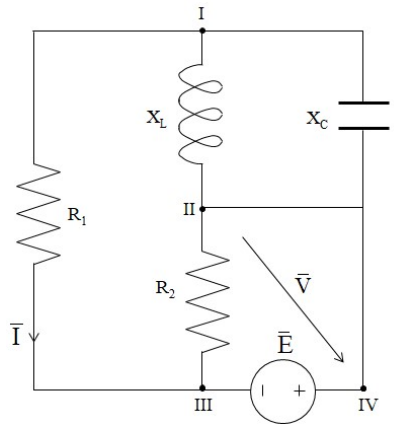



*Fig. 9.9 – Circuito di Fig. 9.8 a cui è stato rimosso il wattmetro.*

### *4.1.2 Calcolo della potenza attiva virtuale misurata dal wattmetro in un circuito in risonanza.*

Si vuole calcolare la misura del wattmetro nel circuito di Fig. 9.10.

DATI: e($t$)=3cos(100$t$) V; $R_1$=10 Ω, $R_2$=10 Ω; $X_L$=10 Ω; $X_C$= −10 Ω)

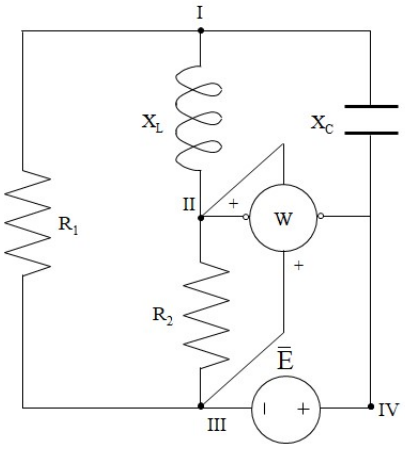



*Fig. 9.10 – Circuito in regime sinusoidale con wattmetro.*

Il wattmetro misura la potenza attiva $P_W$:

$$P_W = \frac{1}{2} Re\left\{\bar{V}\bar{I}^*\right\} \qquad (9.60)$$

con $\overline{I}^*$ fasore coniugato del fasore $\overline{I}$, e $\overline{V}$ come mostrati in Fig. 9.11. Il fasore della tensione $\overline{V}$ è quella del resistore $R_2$, Il fasore della corrente $\overline{I}$ non è quello del resistore $R_2$, essendo piuttosto quello del corto circuito che collega i nodi II e IV. Tuttavia, consideriamo il fatto che i due elementi reattivi in parallelo sono in risonanza, essendo $X_C = -X_L$. Pertanto, il circuito di Fig. 9.11 può essere ridisegnato nel suo equivalente di Fig. 9.12, nel quale al parallelo dei due elementi reattivi è stato sostituito un circuito aperto. Ciò detto, come si può notare nella Fig. 9.12, il fasore della corrente $\overline{I}$ uguaglia la corrente del resistore $R_2$ e pertanto la potenza misurata dal wattmetro (9.60) è la potenza attiva (media) assorbita dal resistore $R_2$.

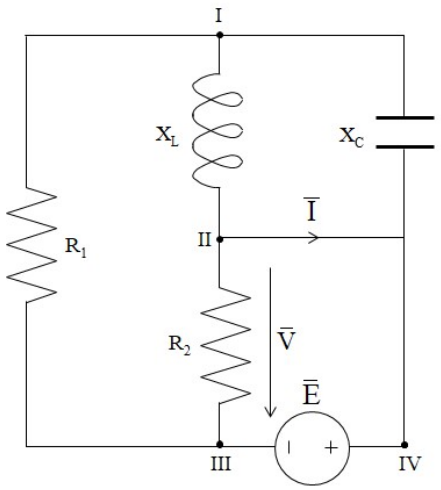



*Fig. 9.11 – Circuito di Fig. 9.10 a cui è stato rimosso il wattmetro.*

Per calcolare la potenza attiva (9.60), per quanto detto, possiamo calcolare la potenza attiva assorbita dal resistore $R_2$ e quindi scrivere:

$$P_W = \frac{1}{2}\frac{V_M^2}{R_2} \tag{9.61}$$

Osservando il circuito di Fig. 9.12 notiamo che il fasore della tensione è opposto al fasore del generatore e quindi abbiamo $\overline{V} = -\overline{E}$. Pertanto, possiamo scrivere dalla (9.61):

$$P_W = \frac{1}{2}\frac{E_M^2}{R_2} \tag{9.62}$$

Per valutare la (9.62), dobbiamo trasformare e($t$)=3sen(100$t$) in fasore. Poniamo:

$$\bar{E} = 3 \tag{9.63}$$

E quindi la (9.63) diventa:

$$P_W = 0.45\text{W} \tag{9.64}$$

😊

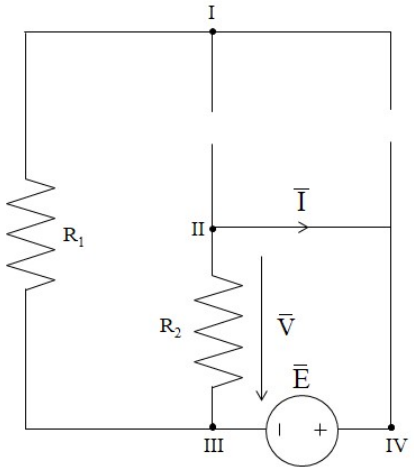



*Fig. 9.12 – Circuito equivalente a quello di Fig. 9.11.*

### *4.1.3 Calcolo della potenza attiva misurata dal wattmetro*

Si vuole calcolare la misura del wattmetro nel circuito di Fig. 9.13.

DATI: e($t$)=3cos(100$t$) V; $R_1$=10 Ω, $R_2$=10 Ω; $X_L$=10 Ω; $X_C$= –12 Ω)

Il wattmetro misura, come possiamo vedere dalla Fig. 9.14, la potenza attiva erogata dal resistore $R_1$. Possiamo quindi scrivere:

$$P_W = -\frac{1}{2}\frac{V_M^2}{R_1} \tag{9.65}$$

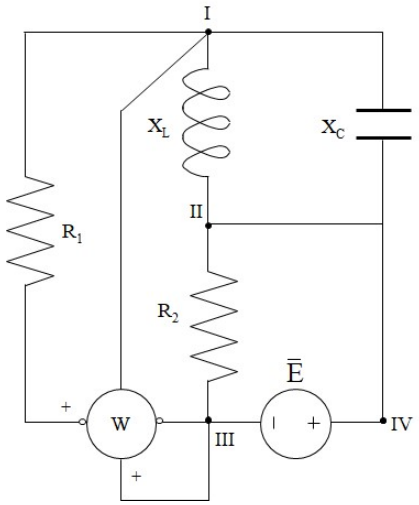



*Fig. 9.13 – Circuito con wattmetro in regime sinusoidale.*

Osserviamo la presenza del segno negativo dovuto al fatto che il wattmetro misura la potenza generata dal resistore $R_1$.

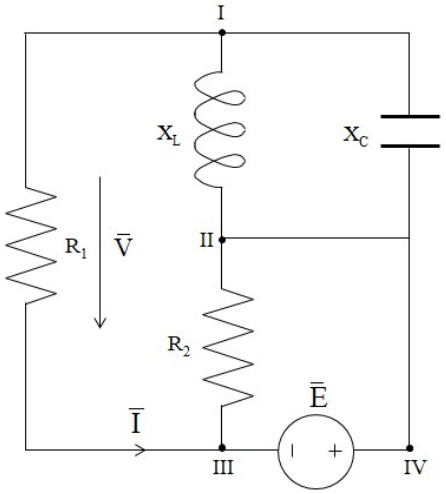



*Fig. 9.14 – Circuito di Fig. 9.13 a cui è stato rimosso il wattmetro.*

Per risolvere l'esercizio dobbiamo calcolare il modulo del fasore della tensione $\bar{V}$. È necessario individuare una strategia risolutiva. Ve ne sono diverse, noi proponiamo di: calcolare l'impedenza equivalente $\dot{Z}_{eq}$ dei due elementi reattivi, calcolare un partitore della tensione del generatore tra il parallelo degli elementi reattivi e la resistenza $R_1$. Procediamo:

$$\dot{Z}_{eq} = \frac{jX_C jX_L}{jX_C + jX_L} = j60 \tag{9.66}$$

Notiamo che complessivamente il parallelo si comporta come un induttore.

Eseguiamo il partitore:

$$\overline{V} = -\frac{R_1}{R_1 + \dot{Z}_{eq}}\overline{E} = -0.08 + j0.49 = 0.5e^{j1.73} \tag{9.67}$$

Dalla (9.65) e dalla (9.67) infine abbiamo:

$$P_W = -\frac{1}{2}\frac{V_M^2}{R_1} = -12.2\text{W} \tag{9.68}$$

😊

## Indice delle figure

Fig. 9.1 – Un grafico di esempio della funzione p(*t*) della (9.2). ..... 4

Fig. 9.2 – Triangolo delle potenze nel dominio dei fasori. ..... 9

Fig. 9.3 – Un bipolo con la convenzione dell'utilizzatore. ..... 18

Fig. 9.4 – Circuito in regime sinusoidale. ..... 20

Fig. 9.5 – Circuito in regime sinusoidale. ..... 22

Fig. 9.6 – Inserimento di un Wattmetro in un circuito a regime sinusoidale nel dominio simbolico. ..... 25

Fig. 9.7 – Circuito in regime sinusoidale. ..... 26

Fig. 9.8 – Circuito in regime sinusoidale con wattmetro. ..... 27

Fig. 9.9 – Circuito di Fig. 9.8 a cui è stato rimosso il wattmetro. ..... 28

Fig. 9.10 – Circuito in regime sinusoidale con wattmetro. ..... 28

Fig. 9.11 – Circuito di Fig. 9.10 a cui è stato rimosso il wattmetro. ..... 29

Fig. 9.12 – Circuito equivalente a quello di Fig. 9.11 ..... 30

Fig. 9.13 – Circuito con wattmetro in regime sinusoidale. ..... 31

Fig. 9.14 – Circuito di Fig. 9.13 a cui è stato rimosso il wattmetro. ..... 31

## Domande

### Teoria

#### *La potenza definita nel dominio del tempo*

9.1 Cosa si intende per potenza fluttuante generata (assorbita) da un bipolo in regime sinusoidale?

9.2 Cosa si intende per potenza media assorbita (generata) da un bipolo in regime sinusoidale?

9.3 Che differenza c'è tra "sfasamento" e "fattore di potenza"?

9.4 Quale è l'espressione della potenza istantanea assorbita (generata) da un bipolo di un circuito in regime sinusoidale quando su di esso si fa la convenzione del generatore (utilizzatore) ($v(t)$ e $i(t)$ sono corrente e tensione del bipolo, $V_M$ e $I_M$ sono i valori massimi delle sinusoidi tensione e corrente, $\alpha_v$ e $\alpha_i$ sono le fasi inziali di tensione e corrente, $\omega$ è la pulsazione)?

9.5 Cosa si intende per fattore di potenza di un bipolo?

9.6 Cosa si intende per fattore di potenza riferito alla potenza assorbita da un bipolo con tensione $v(t)$ e corrente $i(t)$?

9.7 La potenza istantanea $v(t)i(t)$ ha un fasore rappresentativo?

9.8 La potenza istantanea $v(t)i(t)$ si può trasformare nel dominio dei fasori?

9.9 Cosa è lo sfasamento tra le due funzioni sinusoidali $v(t)=V_M\cos(\omega t+\alpha_v)$ e $i(t)=I_M\cos(\omega t+\alpha_i)$?

9.10 Data la funzione periodica $x(t)=X_M\cos(\omega t+\alpha_x)$ quanto vale il suo valor medio in un periodo?

9.11 Date le funzioni periodiche $x(t)=X_M\cos(\omega t+\alpha_x)$ e $y(t)=Y_M\cos(\omega t+\alpha_y)$, quanto vale il valor medio in un periodo del prodotto delle due?

9.12 Quanto vale il valor medio della potenza assorbita da un induttore (condensatore), con valore dell'induttanza (capacità) pari ad L (C), e con corrente (tensione) $i(t)=I_M\cos(\omega t+\alpha_i+\pi/2)$ ($v(t)=V_M\cos(\omega t+\alpha_v+\pi/2)$), in un circuito in regime sinusoidale?

9.13 Come si misura la potenza media?

## *La potenza definita nel dominio simbolico*

9.14 La potenza attiva introdotta nel dominio dei fasori, è uguale alla potenza istantanea definita nel dominio del tempo?

9.15 La potenza apparente S assorbita da un bipolo di un circuito in regime sinusoidale con P potenza attiva e Q potenza reattiva risulta:

9.16 La formula per la potenza complessa $\overline{S}$ assorbita da un bipolo di un circuito in regime sinusoidale con $v(t)=V_M\cos(\omega t+\alpha_v)$; $i(t)=I_M\cos(\omega t+\alpha_i+\pi/2)$ (convenzione utilizzatore).

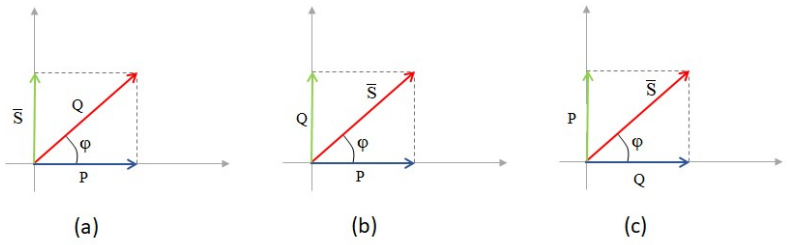
9.17 Che differenza c'è nell'espressione della potenza complessa $\overline{S}$, in un circuito a regime sinusoidale con il metodo simbolico, quando i fasori sono efficaci e quando non sono efficaci?

9.18 Quale è l'espressione corretta della potenza attiva (reattiva), in un circuito a regime sinusoidale con il metodo simbolico, quando i fasori sono efficaci?

9.19 Quale è l'unità di misura che si utilizza per la potenza attiva?

9.20 Quale è l'unità di misura che si utilizza per la potenza reattiva?

9.21 Quali tra i seguenti grafici rappresenta correttamente il cosiddetto triangolo delle potenze?



## *La potenza complessa nei bipoli passivi e attivi*

9.22 Quanto vale la potenza attiva (reattiva) assorbita da un induttore (condensatore), con valore dell'induttanza pari ad L (C), e con tensione $v(t)=V_M\cos(\omega t+\alpha_v)$ e corrente $i(t)=I_M\cos(\omega t+\alpha_i)$, in un circuito in regime sinusoidale nel dominio dei fasori?

9.23 Quanto vale la potenza attiva (reattiva) assorbita da un resistore, con valore della resistenza pari a R, e con tensione $v(t)=V_M\cos(\omega t+\alpha_v)$ e corrente $i(t)=I_M\cos(\omega t+\alpha_i)$, in un circuito in regime sinusoidale nel dominio dei fasori?

9.24 Quanto vale lo "sfasamento" tra tensione e corrente di un bipolo resistore presente in un circuito a regime sinusoidale?

9.25 Quanto vale il "fattore di potenza" tra tensione e corrente di un bipolo resistore presente in un circuito a regime sinusoidale?

9.26 Quanto vale lo "sfasamento" tra tensione e corrente di un bipolo induttore (condensatore) presente in un circuito a regime sinusoidale?

9.27 Quanto vale il "fattore di potenza" tra tensione e corrente di un bipolo induttore (condensatore) presente in un circuito a regime sinusoidale?

## *La potenza e la sovrapposizione degli effetti*

9.28 Dato un circuito a regime sinusoidale in cui sono presenti due generatori sinusoidali isofrequenziali, è possibile utilizzare il principio di sovrapposizione degli effetti e sommare le potenze medie calcolate quando è acceso un solo generatore alla volta?

9.29 Dato un circuito a regime sinusoidale in cui sono presenti due generatori sinusoidali con frequenze $\omega_2=n\omega_1$, con n=1, 2, 3, ... , è possibile utilizzare il principio di sovrapposizione degli effetti e sommare le potenze medie calcolate quando è acceso un solo generatore alla volta?

9.30 Dato un circuito a regime sinusoidale in cui sono presenti due generatori sinusoidali con frequenze $\omega_2 \neq n\omega_1$, con n=1, 2, 3, ...,, è possibile utilizzare il principio di

sovrapposizione degli effetti e sommare le potenze medie calcolate quando è acceso un solo generatore alla volta?

## *Il teorema di Tellegen in regime sinusoidale*

9.31 Perché in un circuito a regime sinusoidale nel dominio dei fasori possiamo dire che la potenza reattiva (attiva) si conserva?

9.32 Il teorema di Tellegen in regime sinusoidale nel dominio dei fasori permette di dimostrare che….

9.33 Quale è l'enunciato del teorema di Tellegen esteso al dominio simbolico che descrive i circuiti a regime sinusoidale?

9.34 La legge di conservazione della potenza virtuale del teorema di Tellegen introdotto nel dominio del tempo per circuiti a regime sinusoidale, può essere trasformata nel dominio dei fasori?

9.35 Come si dimostra il teorema di Tellegen enunciato nel dominio simbolico?

9.36 Perché nell'enunciato del teorema di Tellegen nel dominio simbolico si parla di conservazione delle potenze complesse virtuali?

## *I circuiti in regime sinusoidale con wattmetro*

9.37 Cosa misura il wattmetro utilizzato in un circuito in regime sinusoidale?

9.38 È possibile utilizzare un wattmetro in un circuito il regime sinusoidale con il metodo simbolico, per misurare il prodotto del modulo della tensione di un bipolo per il modulo della corrente di un differente bipolo per il coseno dello sfasamento tra i due fasori?

9.39 È possibile misurare la potenza reattiva assorbita (erogata) da un bipolo di un circuito a regime sinusoidale con il metodo simbolico?

## Esercizi

Quando indicato dalla presenza del simbolo @ si tratta di esercizi risolti presi dal sito:

https://autocircuits.org/autocir_home.html. È possibile generare altri esercizi risolti utilizzando il sito che prevede varie categorie di esercizi. Quando trovate il simbolo @, vuol dire che è possibile utilizzare il sito per la tipologia di esercizi che si stanno risolvendo.

### *Calcolo della potenza di un bipolo*

9.40 Dati $\bar{V} = 10e^{j\frac{\pi}{4}}$ e $\bar{I} = 2e^{-j\frac{\pi}{4}}$ ($V_{eff}$=10, $I_{eff}$=2) calcolare la potenza apparente S, attiva P e reattiva Q.

S=20W, P=0W, Q=20VAr

9.41 Dati i fasori tensione e corrente di un bipolo $\bar{V} = 2 - j2$ e $\bar{I} = -j$ calcolare l'angolo di potenza $\varphi$ tra i due vettori.

$\varphi$=arctg$(1)$

9.42 Dati i fasori $\bar{V} = -3 - j2$ e $\bar{I} = -2$ calcolare la potenza attiva e reattiva (si sono usati i valori efficaci per i fasori)

P=6W, Q=4VAr

9.43 Se un bipolo ha $\dot{Z} = -1 - j2$ quanto vale l'angolo di potenza $\varphi$?

$\varphi$=1.11+$\pi$

9.44 Dati il fasore della tensione $\bar{V} = 2 - j2$ e l'impedenza $\dot{Z} = 1 - j$ di un bipolo, calcolare la potenza complessa $\bar{S}$, apparente S, attiva P e reattiva Q (per la trasformazione nel dominio dei fasori si è usato il valore efficace)

$\bar{S}$ = 4–*j*4; A = 4W; P = 4W; Q = –4VAr;

9.45 Dati i fasori $\bar{V} = 10e^{j\frac{\pi}{4}}$ e $\bar{I} = -2e^{-j\frac{3}{2}\pi}$ di tensione e corrente su un bipolo in regime sinusoidale, su cui è fatta la convenzione del generatore, calcolare la potenza

complessa $\overline{S}$ assorbita dal bipolo. (I fasori sono stati ottenuti con le ampiezze massime)

$\overline{S} = \sqrt{2}(5 - j5)$

9.46 Dati i fasori $\overline{V} = -2 - j$ e $\overline{I} = 3 - j2$ (trasformazione con valori efficaci) di un bipolo calcolare la potenza attiva P e reattiva Q.

P=–4W, Q=–7VAr

9.47 Se un bipolo ha l'impedenza $\dot{Z} = -1 - j2$ quanto vale il fattore di potenza?

9.48 Dati il fasore della tensione $\overline{V} = 4 - j3$ e l'impedenza $\dot{Z} = -j$ di un bipolo, calcolare la potenza complessa $\overline{S}$, apparente S, attiva P e reattiva Q.

(per la trasformazione nel dominio dei fasori si è usato il valore efficace)

$\overline{S} = -j25$; S = 25; P =0W; Q = –25VAr

9.49 Dati $\overline{V} = 3 - j2$ e $\overline{I} = -2$ calcolare la potenza complessa $\overline{S}$. (I fasori sono stati ottenuti con le ampiezze massime)

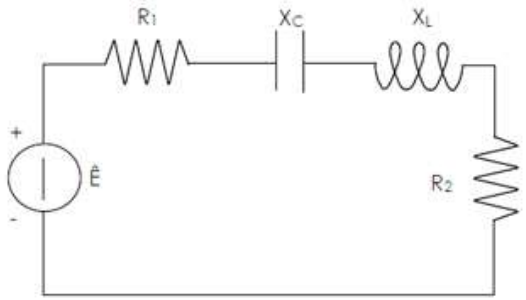
$\overline{S} = -3 + j2$

## *Calcolo della potenza in un circuito a regime sinusoidale*

9.50 Quanto vale la potenza reattiva $Q_E$ erogata dal generatore di tensione del circuito in regime sinusoidale di figura:

(e($t$)=10sen(100$t$), $R_1$=10 Ω, $R_2$=10 Ω, C=10mF, L=10mH)

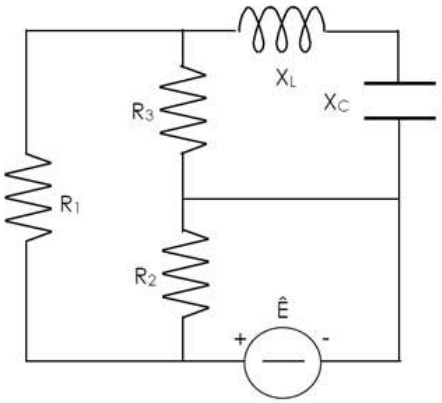
$Q_E$ = 0VAr



9.51 Quanto vale la potenza attiva P erogata dal generatore di tensione inserito nel circuito in regime sinusoidale di figura?

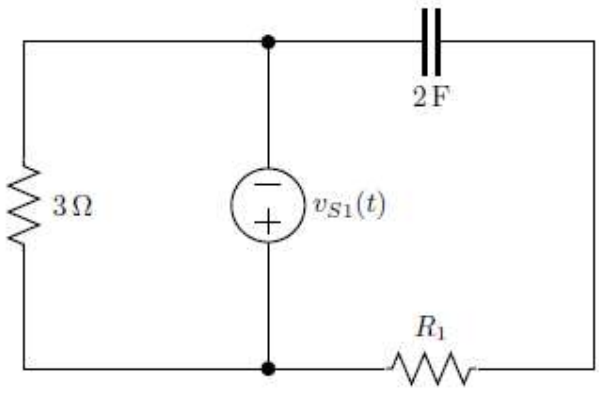
( $\bar{\dot{E}} = j15$, $R_1=10\Omega$, $R_2=10\Omega$, $R_3=5\ \Omega$, $X_L=10\ \Omega$, $X_C=10\ \Omega$)

P = 45/2 W



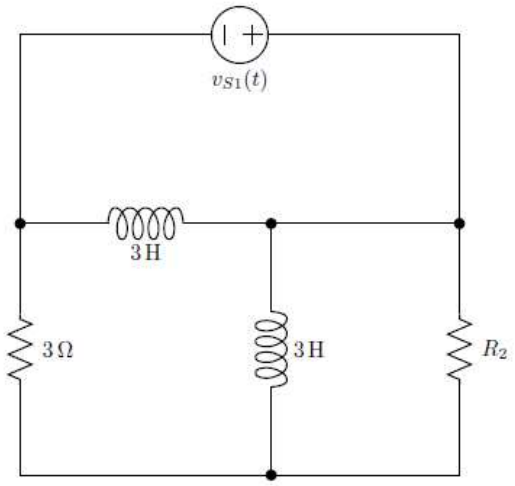

9.52 @ Il circuito di figura lavora a regime sinusoidale. Trovare la potenza attiva P e reattiva Q assorbita dal resistore $R_1=2\Omega$. ($v_{s1}(t)=3\cos(2t-180°)$).

P=2.215W, Q=0.




9.53 @ Il circuito di figura lavora a regime sinusoidale. Trovare la potenza attiva P e reattiva Q assorbita dal resistore $R_2=3\Omega$. ($v_{s1}(t)=2\cos(2t-90°)$).

P=8/51W, Q=0.

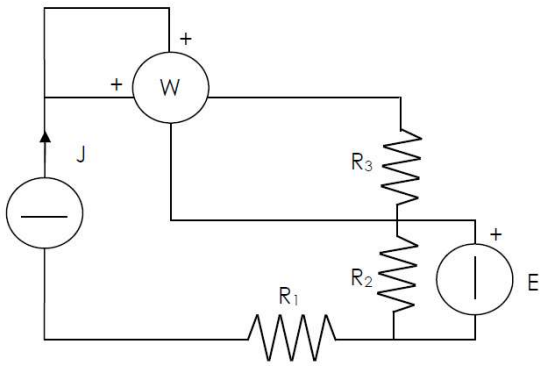



## *Calcolo della misura di un wattmetro inserito in un circuito a regime sinusoidale*

9.54 Calcolare il valore della potenza $P_W$ misurata dal wattmetro inserito in figura.

( $\overline{J} = 10$ , $\overline{E}$ =10V, $R_1$=1 Ω, $R_2$=3 Ω, $R_3$=2 Ω, $R_4$=2 Ω)

$P_W$ =200W

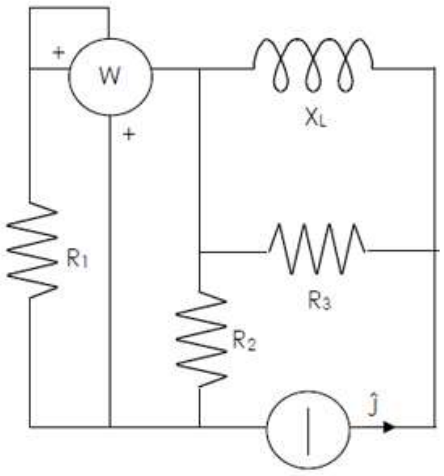



9.55 Calcolare il valore della potenza $P_W$ misurata dal wattmetro inserito in figura

(per la trasformazione nel dominio dei fasori si è usato il valore efficace)

( $\overline{J} = j10$ , $R_1$ =10 Ω, $R_2$ =10Ω, $R_3$=30 Ω, $X_L$=20 Ω)

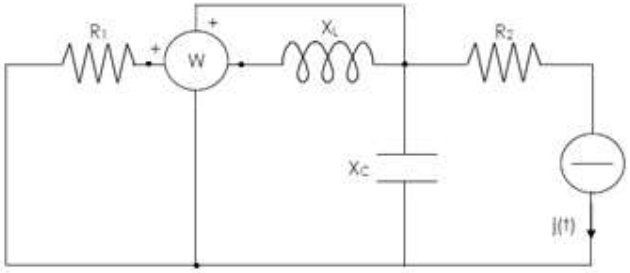
$P_W$ = 250W




9.56 Calcolare il valore della potenza $P_W$ misurata dal wattmetro inserito in figura (per la trasformazione nel dominio dei fasori si è usato il valore efficace)

( $\bar{J} = j10$ , $R_1$=10 Ω, $R_2$=20 Ω, $X_C$=20 Ω, $X_L$=20Ω)

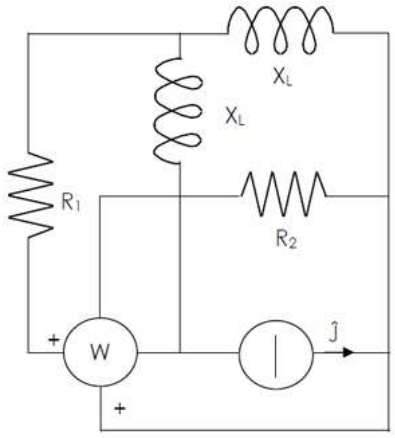
$P_W = -4000$W




9.57 Quanto vale la potenza $P_W$ misurata dal wattmetro inserito nel circuito di figura

(j(*t*)=3sen(100*t*), $R_1$=10 Ω, $R_2$=10 Ω, $X_L$=10 Ω)

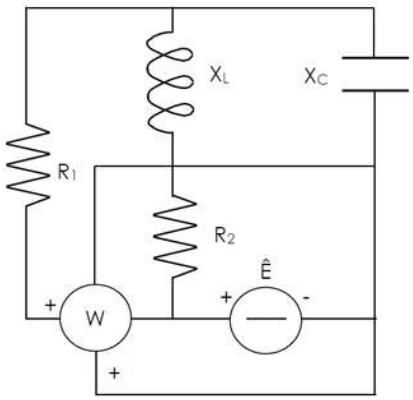
$P_W$ = 10W




9.58 Quanto vale la potenza $P_W$ misurata dal wattmetro inserito nel circuito di figura?

($e(t)=3\text{sen}(100t)$, $R_1=10\ \Omega$, $R_2=10\ \Omega$, $X_L=10\ \Omega$)

$P_W = 0\text{W}$

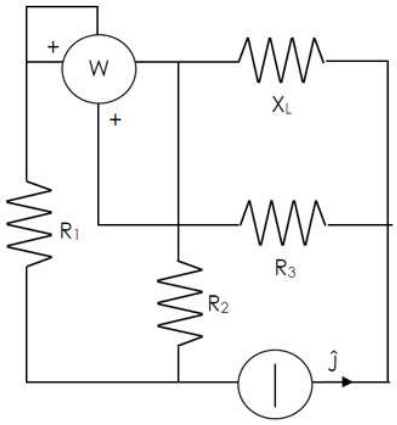



9.59 Calcolare il valore della potenza $P_W$ misurata dal wattmetro inserito in figura

(per la trasformazione nel dominio dei fasori si h usato il valore efficace)

($\bar{J} = j10$, $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 10\ \Omega$, $R_3 = 30\ \Omega$, $X_L = 20\ \Omega$)

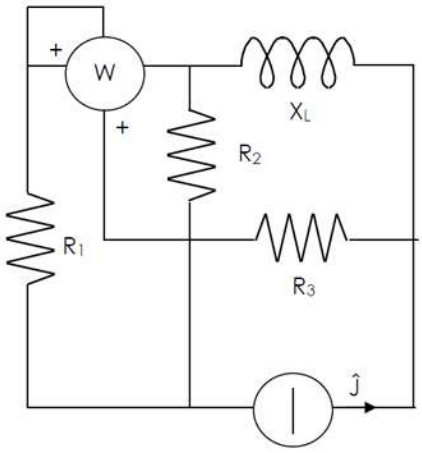
$P_W = 0\text{W}$




9.60 Quanto vale la potenza $P_W$ misurata dal wattmetro inserito nel circuito di figura

($j(t)=2\text{sen}(100t)$, $R_1=10\ \Omega$, $R_2=10\ \Omega$; $R_3=5\ \Omega$; $X_L=10\ \Omega$)

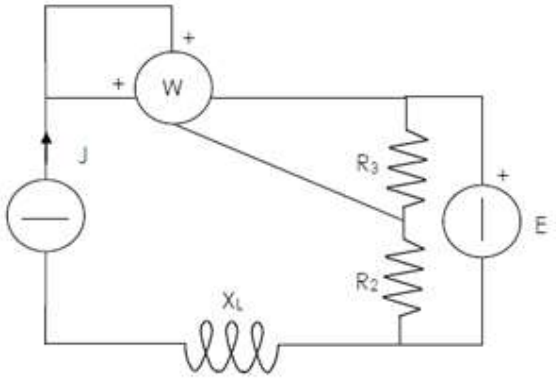
$P_W = 5/8$ W




9.61 Calcolare il valore della potenza $P_W$ misurata dal wattmetro inserito in figura (per la trasformazione nel dominio dei fasori si è usato il valore efficace)

($\bar{J} = j10$, $\bar{E} = 10(1+j)$, $R_2=30\ \Omega$, $R_3=30\ \Omega$, $X_L=20\ \Omega$)

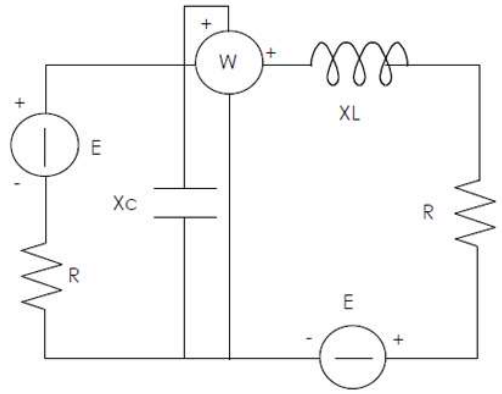
$P_W = 50$ W




9.62 Calcolare il valore della potenza $P_W$ misurata dal wattmetro inserito in figura (per la trasformazione nel dominio dei fasori si è usato il valore efficace)

($\bar{E} = j10$, R =10 Ω, $X_C$ = 20 Ω, $X_L$ = 20 Ω)

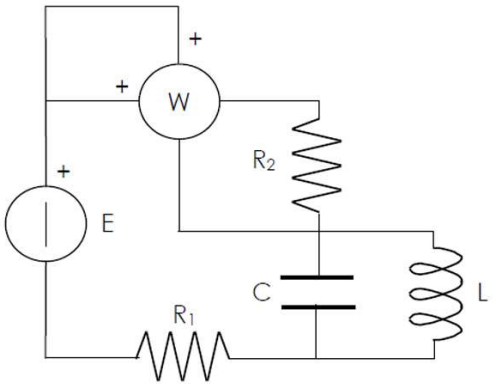
$P_W = -40/29$W




9.63 Quanto vale la potenza misurata dal wattmetro $P_W$ inserito nel circuito di figura:

(e(*t*)=10sen(100*t*), $R_1$=1 Ω, $R_2$=2 Ω, C=0,01mF, L=10mH)

$P_W$ = 5W


+
+
W
R2
+
E
C
L
R1